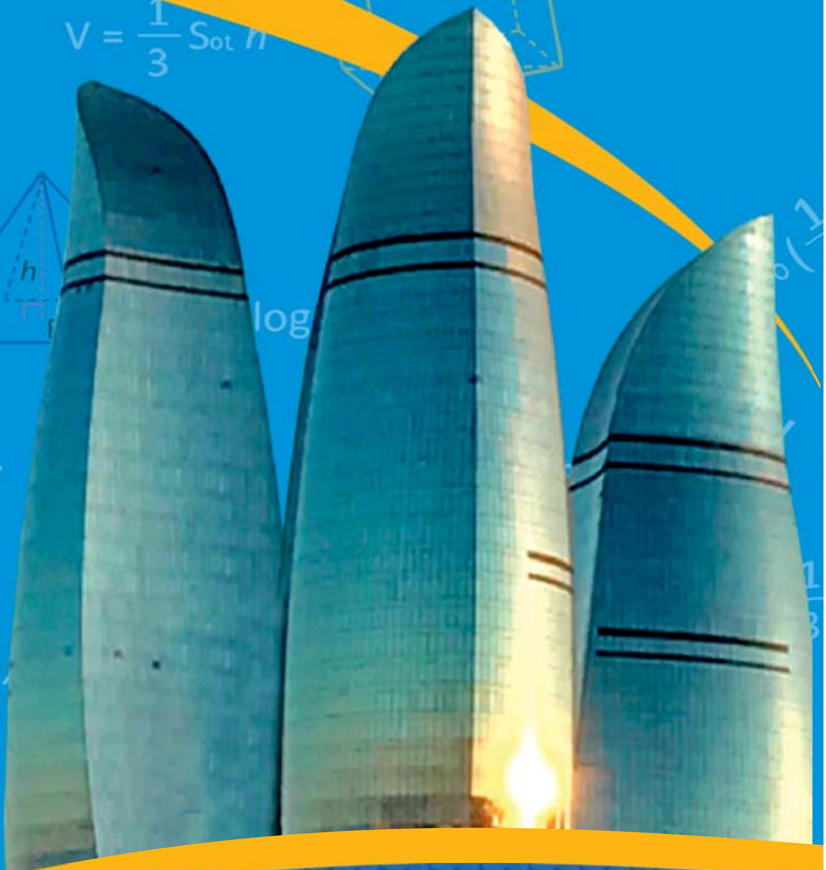
RİYAZİYYAT

DƏRSLİK 10



AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

HEYDƏR ƏLİYEV
AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
İlham Hüseynov

Ümumi təhsil müəssisələrinin 10-cu sinifləri üçün

RİYAZİYYAT

fənni üzrə

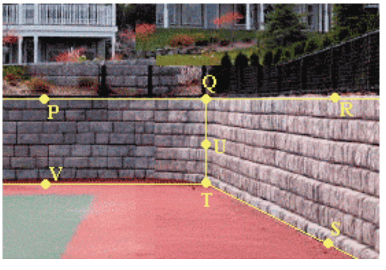
DƏRSLİK

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi
radius_n@hotmail.com və ***derslik@edu.gov.az***
elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

RADİUS

Mündəricat

1. Funksiyalar



2. Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

3. Triqonometrik ifadələr və onların çevrilmələri

4. Sinuslar teoremi və kosinuslar teoremi

5. Triqonometrik funksiyalar və onların qrafikləri

6. Çoxüzlülər

7. Triqonometrik tənliklər

8. Fəza fiqurlarının həcmi

9. Üstlü və loqarifmik funksiyalar

10. Məlumatlar, proqnozlar

1 Funksiyalar

Funksiya və onun verilmə üsulları

Funksiyaların xassələri

Bəzi funksiyaların qrafiki və xassələri

$y = x^n$ $(n \in N)$ qüvvət funksiyaları

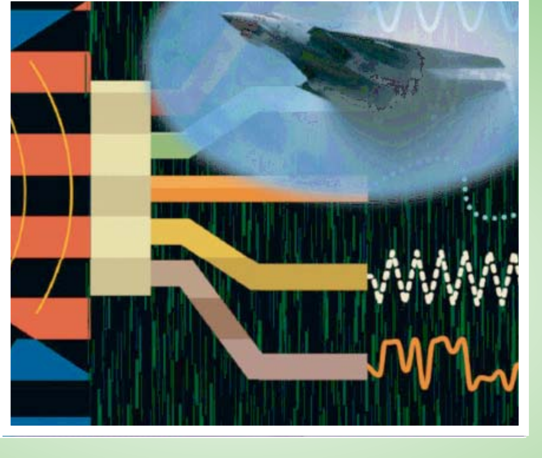
Hissə-hissə verilmiş funksiyalar

Qrafiklərin çevrilmələri

Mürəkkəb funksiya

Tərs funksiya

Bəzi funksiyaların təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu

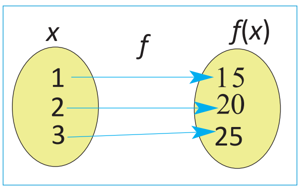


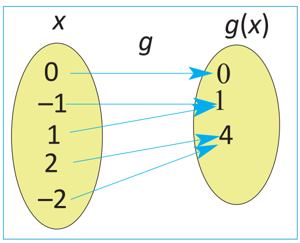
Ətraf aləmdə baş verən müxtəlif proseslərdə kəmiyyətlərin bəziləri digərlərindən asılı olaraq dəyişir və birinin qiyməti digərinin qiymətini müəyyən edir.
Məsələn, piyadanın getdiyi yolun uzunluğu zamandan asılı olaraq dəyişir, ərzağa ödənilən pul onun kütləsindən asılı olaraq dəyişir. Yol və zaman, kütlə və dəyər dəyişən kəmiyyətlərdir. Bu kəmiyyətlərdən biri sərbəst, digəri isə ondan asılı olaraq dəyişir. Məsələn, zaman sərbəst dəyişən, gedilən yol isə zamandan asılı dəyişən kəmiyyətdir, ərzağın kütləsi sərbəst, onun dəyəri isə asılı dəyişən kəmiyyətdir. Aydındır ki, dəyişən kəmiyyətlərin hər biri müəyyən çoxluqdan qiymətlər alır.

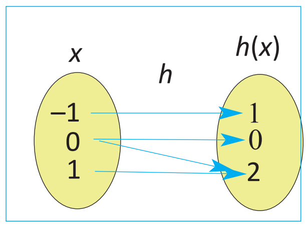
X çoxluğunun hər bir *x* elementinə *Y* çoxluğunun yeganə *y* elementini qarşı qoyan qaydaya *X* çoxluğunda təyin olunmuş funksiya deyilir.

Burada *x* sərbəst dəyişən və ya arqument, *y* isə asılı dəyişən və ya funksiya adlanır. Funksiya adətən *f* (və ya *g*, *h* və s.) ilə, arqumentin verilmiş *x* qiymətinə funksiyanın uyğun qiyməti isə $f(x)$ (və ya $g(x)$, $h(x)$ və s.) ilə işarə edilir.

Aşağıdakı nümunələrdə *f, g* və *h* uyğunluqları verilmişdir.







$f(1) = 15$
$f(2) = 20$
$f(3) = 25$

$g(0) = 0$, $g(-1) = 1$,
$g(1) = 1$, $g(-2) = 4$,
$g(2) = 4$

$h(-1) = 1$, $h(0) = 0$,
$h(0) = 2$, $h(1) = 2$

Burada *f* və *g* uyğunluqlarının hər biri funksiyadır. *h* isə funksiya deyil, çünki *x*-in eyni qiymətinə ($x = 0$) $h(x)$-in müxtəlif qiymətləri (0 və 2) uyğun gəlir.

Arqumentin ala bildiyi bütün qiymətlər çoxluğuna funksiyanın **təyin oblastı** deyilir. Arqumentin bu qiymətlərinə uyğun asılı dəyişənin aldığı bütün qiymətlər funksiyanın **qiymətlər çoxluğunu** əmələ gətirir. *f* funksiyasının təyin oblastı adətən $D(f)$ ilə, qiymətlər çoxluğu isə $E(f)$ ilə işarə edilir.

Funksiya müxtəlif üsullarla verilə bilər: cədvəllə, analitik üsulla (düsturla), qrafiklə və s.

Funksiya cədvəllə verilir. Cədvəlin bir sətrində (və ya sütununda) sərbəst dəyişənin, digər sətrində (və ya sütununda) isə asılı dəyişənin qiymətləri göstərilir.

Nümunə 1.

Bir hektardan yığılan taxıl məhsulu							
x (İllər)	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
y (1 ha-dan yığılan məhsul -tonla)	3	4	2	3	5	3	4

(2009; 3), (2010; 4), (2011; 2), (2012; 3), (20013; 5), (2014; 3), (2015; 4) cütləri 1 hektardan yığılan məhsulun illərə görə dəyişməsini göstərir.

Təyin oblastı (illər): {2009; 2010; 2011; 2012; 2013; 2014; 2015}

Qiymətlər çoxluğu (1 hektardan yığılan məhsulun miqdarı): {2; 3; 4; 5}

Funksiya analitik üsulla verilir. Analitik üsulda sərbəst dəyişənlə asılı dəyişən arasındakı asılılıq düsturla verilir.

Nümunə 2. $f(x) = x^2$, $1 \le x \le 3$

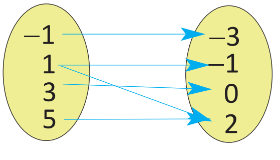
Bu yazılış onu göstərir ki, təyin oblastı [1; 3] aralığıdır və bu aralıqdan götürülmüş hər bir ədədə həmin ədədin kvadratı qarşı qoyulur.

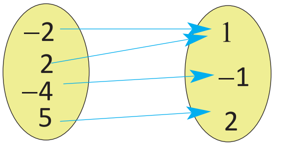
Məsələn, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(1{,}2) = 1{,}2^2 = 1{,}44$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(3) = 3^2 = 9$ və s.

Bu halda $f(4)$ yazılışı mənasızdır, çünki 4 ədədi verilmiş funksiyanın təyin oblastı olan [1; 3] aralığına daxil deyil.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Uyğunluğun funksiya olub-olmadığını müəyyən edin. Funksiya olan asılılığı cədvəllə verin.

a) 

b) 

2. x və y-in cədvəllə verilmiş qiymətlərinə görə hansı halda y-in x-dən asılı funksiya olduğunu demək olar?

a)

x	3	0	0	–1	–3
y	–4	–3	–1	–2	0

b)

x	7	6	5	4	3
y	–1	2	–1	2	3

3. $f(x) = 1 - 2x$ funksiyası verilmişdir.
$f(-2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(3)$ qiymətlərini tapın.

4. a) y = 3x –1 düsturu ilə verilmiş funksiyanın qiymətlər cədvəlini tamamlayın.

x	–4		0			6	
y		–7		11	14		20

b) y = 2x –1 funksiyasının təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

5. $g(x) = 4x^3 – x$ funksiyası üçün g(2) + g(–2) cəmini hesablayın.

6. $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$ funksiyası verilmişdir. Arqumentin hansı qiymətində funksiyanın qiyməti: a) 1; b) 0; c) –2 olar?

Funksiya qrafiklə verilir. Funksiyanın qrafiki koordinat müstəvisində absisi arqumentin, ordinatı isə funksiyanın uyğun qiyməti olan bütün nöqtələrin həndəsi yeridir.

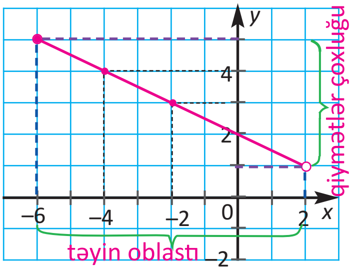
Nümunə 3. Şəkildə *f*(*x*) funksiyası qrafiklə verilmişdir.

Qrafikə görə funksiyanın:

a) təyin oblastını;

b) qiymətlər çoxluğunu;

c) *f*(–4) və *f*(–2) qiymətlərini tapın.



Həlli:

a) Qrafikin uc nöqtələrinin rəngli və ya rəngsiz dairəciklə qeyd olunmasını nəzərə alaq.

Təyin oblastı: $-6 \le x < 2$

b) Qiymətlər çoxluğu: $1 < y \le 5$

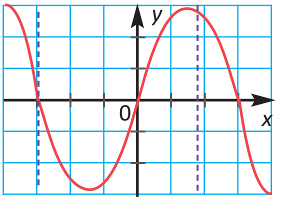
c) $f(-4) = 4$, $f(-2) = 3$

İki kəmiyyət arasındakı asılılığın funksiya olub-olmadığını onun qrafikinə görə müəyyən etmək olar.

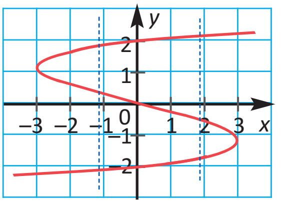
Ordinat oxuna paralel çəkilmiş istənilən şaquli düz xətt qrafiki ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu asılılıq funksiyadır (şəkil a).

Ordinat oxuna paralel çəkilən və qrafiki iki (və ya daha çox) nöqtədə kəsən düz xətt varsa (şəkil b), bu asılılıq funksiya deyil. Bu onu göstərir ki, arqumentin (*x*-in) eyni qiymətinə funksiyanın bir neçə qiyməti uyğundur. Bu isə funksiyanın tərifinə ziddir.

a)



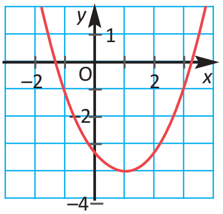
b)



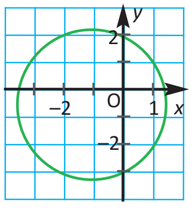
Öyrənmə tapşırıqları

7. Şaquli xətt çəkməklə verilən əyrilərin hər hansı bir funksiyanın qrafiki olub-olmadığını yoxlayın.

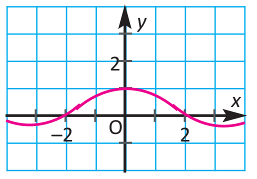
a)



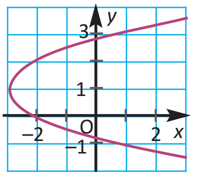
b)



c)

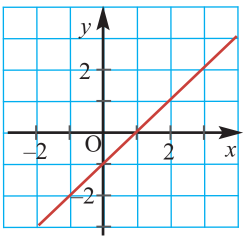


d)

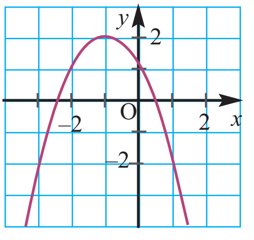


8. Qrafiklə verilmiş funksiyaların hər biri üçün $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(-2)$ qiymətlərini tapın.

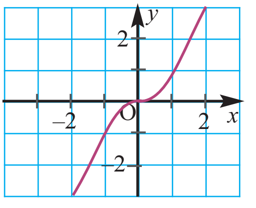
a)



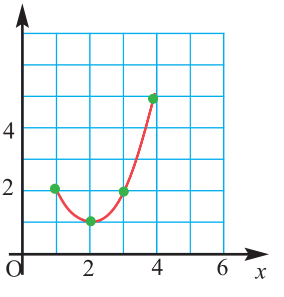
b)



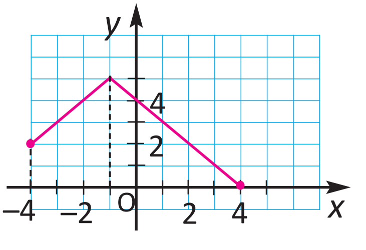
c)



9. Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.
a) Funksiyanın qrafiki üzərində qeyd edilmiş nöqtələri koordinatları ilə yazın.
b) Funksiyanı cədvəllə təqdim edin.
c) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.



10. $f(x)$ funksiyasının verilmiş qrafikinə görə tapın:
a) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ qiymətlərini;
b) x-in $f(x) = 1$ və x-in $f(x) = 3$ bərabərliyini ödəyən qiymətlərini.

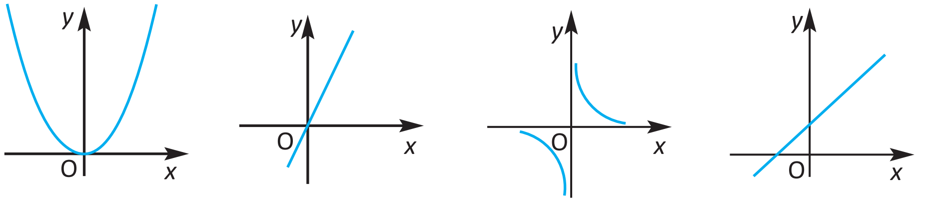


11. $y = 2x + b$ funksiyasının qrafiki A(1; –1) nöqtəsindən keçir.
a) b-ni tapın b) Funksiyanın qrafikini qurun.

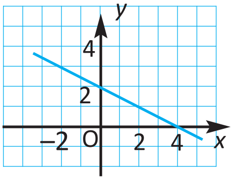
12. c-nin hansı qiymətində $f(x) = x^2 + x + c$ funksiyasının qrafiki A(–1; 2) nöqtəsindən keçir?

13. $f(x) = x^2 - 2x + q$ funksiyası verilmişdir. $f(0) = -3$ olarsa, $f(-1)$-i tapın.

14. Şəkildə $y = 2x$, $y = 2 + x$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Hər funksiyaya uyğun qrafiki göstərin.

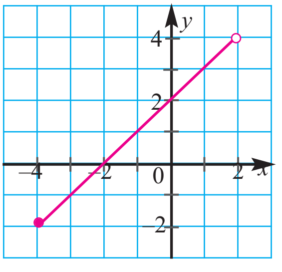


15. a) Qrafiki verilmiş xətti funksiyanı düsturla $f(x) = kx + b$ şəklində yazın.
b) $f(-2)$, $f(6)$ qiymətlərini tapın.

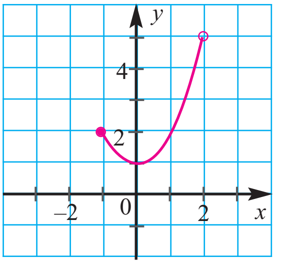


16. Funksiyanın qrafikinə görə onun düsturunu yazın. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a)



b)



17. Elgün deyir ki, aşağıdakı cədvəldə verilən qiymətlərə görə y-in x-dən asılı funksiya olduğunu demək olmaz, çünki x-in müxtəlif qiymətlərinə y-in eyni qiyməti uyğundur. Siz necə düşünürsünüz?

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

18. Aşağıdakı asılılıqlardan hansına funksiya demək olar? Əgər funksiyadırsa, bu asılılığı düsturla ifadə edin.

a) Ramiz həftəlik 50 manat sabit maaş və üstəgəl satışın 2%-i qədər əlavə alır. Ramizin həftəlik maaşının satışdan əldə edilən gəlirdən asılılığı.

b) Əsmər 5 km/saat sürətlə yeriyirsə, onun getdiyi yolun uzunluğunun zamandan asılılığı.

c) Kompüter oyununda uşaqların topladıqları xalların onların yaşlarından asılılığı.

19. Funksiyanın qrafikini qrafkalkulyatorla qurun.
Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu aralıq şəklində yazın.

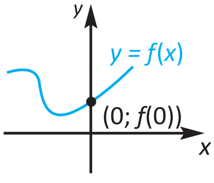
a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \ -6 \le x < 2$

b) $f(x) = x^2 - 2|x|, \ -4 \le x \le 4$

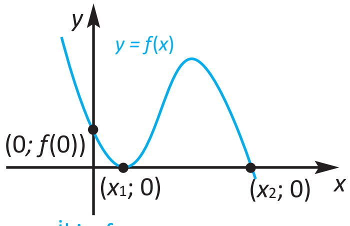
Funksiyanın sıfırları

Funksiyanın xassələrini əyani görmək üçün onun qrafiki əlverişlidir.

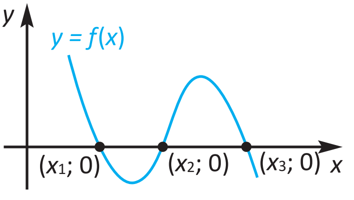
Funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrində $f(x) = 0$ olur. Arqumentin funksiyanı sıfıra çevirən qiymətlərinə **funksiyanın sıfırları** deyilir.



Sıfırı yoxdur.



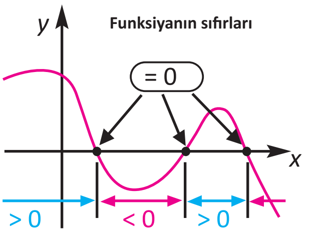
İki sıfırı var. x_1, x_2



Üç sıfırı var. x_1, x_2, x_3,

$f(x)$ funksiyasının sıfırları $f(x) = 0$ tənliyinin kökləridir.

Şəkildə funksiyanın sıfırları və işarə sabitliyi aralıqları sxematik olaraq göstərilmişdir.



Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyanın sıfırlarını tapın.

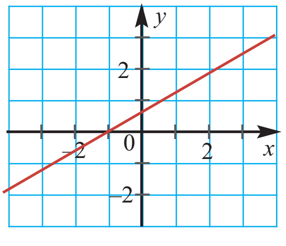
a) $y = \frac{1}{5}x - 4$ b) $y = 2x(x - 3)$ c) $y = \sqrt{x} - 2$ d) $y = \sqrt{x - 2}$

2. Sıfırları verilən ədədlər olan hər hansı funksiyanın qrafikini təsvir edin.

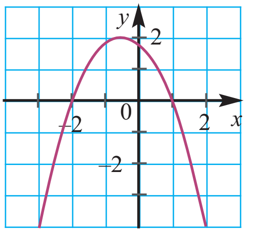
a) -1 b) $-2; 1$ c) $-1; 3$ d) $-2; 1; 4$

3. Qrafiki verilmiş funksiyanın sıfırlarını və işarə sabitliyi aralıqlarını yazın.

a)



b)

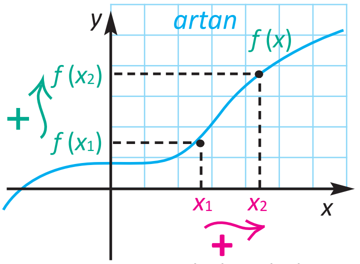


4. Verilmiş funksiyanın sıfırlarını tapın, qrafikini sxematik təsvir edin, işarə sabitliyi aralıqlarını yazın.

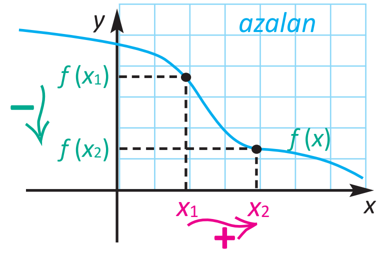
a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = 4x - x^2$ c) $y = x^2 - 2x - 3$

Funksiyanın artması və azalması

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası müəyyən aralıqda təyin olunmuşdur. Bu aralıqdan götürülmüş $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $f(x_2) > f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğundursa, **bu aralıqda $f(x)$-ə artan,** $f(x_2) < f(x_1)$ olarsa, yəni arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğundursa, **$f(x)$-ə bu aralıqda azalan funksiya** deyilir. Funksiyanın verilən aralıqda artan olmasını ↑ ilə, azalan olmasını isə ↓ ilə göstərəcəyik.



$x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$

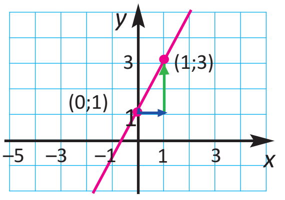


$x_2 > x_1$ $f(x_2) < f(x_1)$

Bucaq əmsalının işarəsinə görə xətti funksiyanın artan və ya azalan olduğunu müəyyən etmək olar.

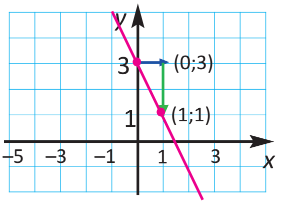
Bucaq əmsalı müsbət olan xətti funksiyalar artandır.

Nümunə 1. *$y = 2x + 1$ funksiyası artandır*

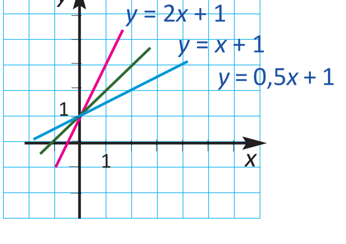


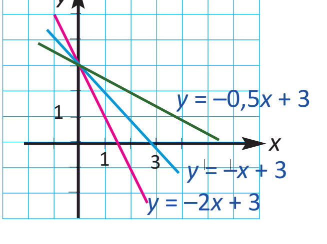
Bucaq əmsalı mənfi olan xətti funksiyalar azalandır.

Nümunə 2. *$y = -2x + 3$ funksiyası azalandır*



Bucaq əmsalının qiymətinə görə xətti funksiyanın qrafikinin - düz xəttin dikliyi dəyişir. Buna uyğun olaraq funksiyanın qiymətlərinin artma və azalma sürəti də dəyişir.



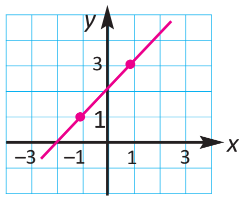


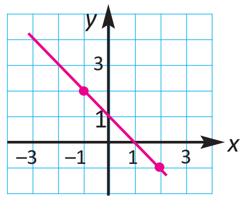
Öyrənmə tapşırıqları

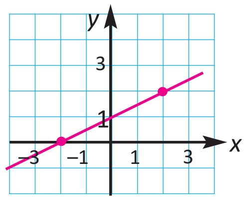
5. Verilən tənliyi y = kx + b şəklində yazmaqla funksiyanın artan və ya azalan olduğunu müəyyən edin. Qrafikini qurmaqla fikrinizin doğruluğunu yoxlayın.

a) $x + 2y = 6$ b) $4x - 3y = 12$ c) $2x - y = 3$

6. Xətti funksiyanın qrafikinə görə bucaq əmsalını müəyyən edin. Funksiya artandır, yoxsa azalan? Funksiyanın düsturunu yazın.

a)


b)


c)


7. Xətti funksiyanın qrafiki verilən iki nöqtədən keçir.
1) Bucaq əmsalını müəyyən edin. 2) Funksiya artandır, yoxsa azalan?
3) Funksiyanın düsturunu yazın 4) Funksiyanın qrafikini qurun.
a) A(3; 7), B(–1; –5) b) A(–1; 5), B (0; 2) c) A(2; –1), B (4; 0)

8. a) Təyin oblastı [1; 4] olan hər hansı artan funksiyanı qrafik təsvir edin.
b) Təyin oblastı [1; 4] olan hər hansı azalan funksiyanı qrafik təsvir edin.

9. $y = f(x)$ funksiyası $(-\infty; +\infty)$ aralığında təyin olunmuş və azalan funksiyadır. Aşağıdakı qiymətləri artan sırada düzün:
a) $f(0)$, $f(-4)$, $f(2)$; b) $f(1)$, $f(-1)$, $f(3)$; c) $f(-\sqrt{3})$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$

10. a) Qrafiki A(1; –1) və B(2; 1) nöqtələrindən keçən $f(x) = kx + b$ funksiyasının düsturunu yazın.
b) $f(-3)$, $f(-4)$, $f(2)$ qiymətlərini artan sırada düzün.
c) Arqumentin hansı qiymətlərində $f(x) \geq f(1)$ olduğunu müəyyən edin.

11. Funksiyanın sıfırlarını tapın, qrafikini sxematik təsvir edin. İşarə sabitliyi aralıqlarını, artma-azalma aralıqlarını göstərin.
a) $y = x^2 - 4$ b) $y = |x| - 1$ c) $y = -x^2 + 2x + 3$

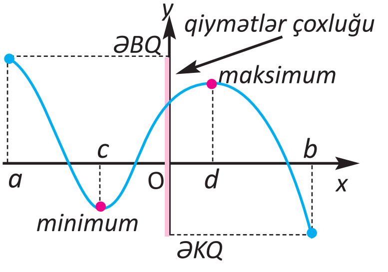
Funksiyanın ekstremumları

Qrafik üzərində funksiyanın qiymətlərinin artmadan azalmaya və ya azalmadan artmaya keçdiyi nöqtələr uyğun olaraq, funksiyanın maksimum və minimumunu göstərir.

Maksimum və minimum nöqtələri x_{max}, x_{min} kimi işarə edilir və ekstremum nöqtələri, funksiyanın bu nöqtələrdəki qiymətləri isə ekstremumları adlanır.

Şəkildə qrafiki verilmiş funksiya $x = c$ nöqtəsində minimuma, $x = d$ nöqtəsində isə maksimuma malikdir. Bu belə yazılır:

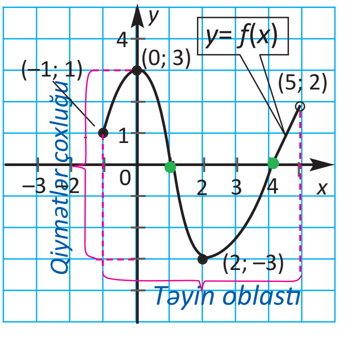
$x_{min} = c$, $f_{min} = f(c)$, $x_{max} = d$, $f_{max} = f(d)$.



Funksiyanın qiymətləri içərisində ən böyüyü ƏBQ, ən kiçiyi isə ƏKQ ilə (əgər varsa) işarə edilir.

Nümunə. Qrafiki verilmiş funksiyanın xassələrini araşdırın və yazın.

Həlli: **1.** Funksiyanın **təyin oblastı** [–1; 5) aralığıdır. $x = –1$ olduqda $f(–1) = 1$ (uyğun nöqtə rəngli dairəciklə göstərilib). (5; 2) nöqtəsi isə qrafikə aid deyil (rəngsiz dairəciklə göstərilib). Funksiyanın **qiymətlər çoxluğu** [–3; 3] aralığıdır.



2. Funksiyanın sıfırları. Qrafikin x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absisləri: $x = 1$ və $x = 4$. Deməli, $x = 1$ və $x = 4$ funksiyanın sıfırlarıdır: $f(1) = 0$, $f(4) = 0$

Funksiyanın sıfırları onun təyin oblastını funksiyanın işarəsini sabit saxladığı üç aralığa bölür: [–1; 1), (1; 4) və (4; 5). Funksiya (1; 4) aralığında mənfi, [–1; 1) və (4; 5) aralıqlarının hər birində müsbət qiymətlər alır.

3. Funksiyanın artması və azalması. Qrafikdən görünür ki, x-in –1-dən 0-a kimi artması ilə y-in qiymətləri 1-dən 3-ə kimi artır, x-in 0-dan 2-yə kimi artması ilə y-in qiymətləri 3-dən –3-ə kimi azalır, x-in 2-dən 5-ə qədər artması ilə y-in qiymətləri –3-dən 2-yə kimi artır.

Funksiya [–1; 0] və [2; 5) aralıqlarının hər birində artandır, [0; 2] aralığında isə azalandır.

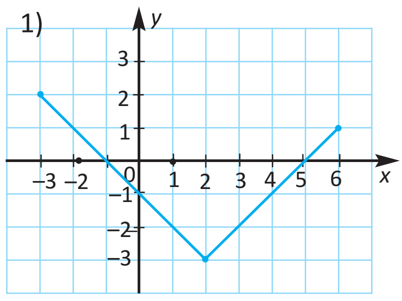
4. Funksiyanın ekstremumları – maksimumu və minimumu. Qrafik üzərindəki (0; 3) və (2; –3) nöqtələri ekstremum nöqtələridir. Bu nöqtələr uyğun olaraq funksiyanın maksimumunu və minimumunu göstərir:

$x_{max} = 0$, $f_{max} = 3$, $x_{min} = 2$, $f_{min} = –3$.

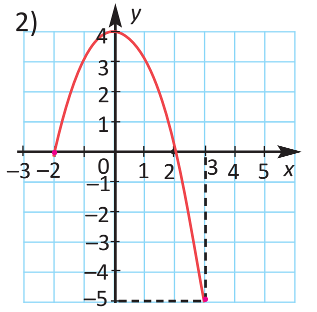
Öyrənmə tapşırıqları

12. Qrafiki şəkildə verilmiş funksiya üçün tapın.
a) təyin oblastını; b) sıfırlarını; c) müsbət qiymətlər aldığı aralıqları;
d) mənfi qiymətlər aldığı aralıqları; e) artma və azalma aralıqlarını;
f) qiymətlər çoxluğunu.

1)



2)



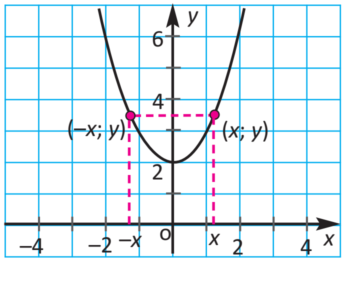
13. Verilmiş funksiyanın verilmiş aralıqda qrafikini qurun. Ekstremumlarını göstərin. Ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

a) $y = 2x - x^2$, $[-1; 2]$ b) $y = x^2 + 4x$, $[-4; 1]$

Cüt funksiya, tək funksiya

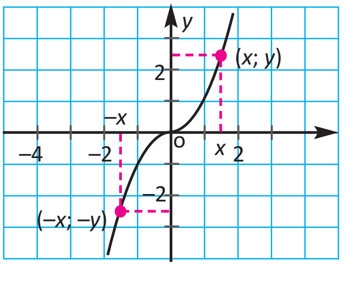
Təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik olan funksiyalara baxaq.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə cüt funksiya deyilir.



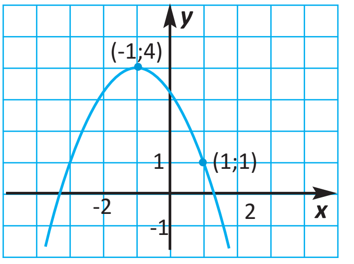
Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

Təyin oblastından götürülmüş ixtiyari x üçün $f(-x) = -f(x)$ olarsa, $f(x)$-ə tək funksiya deyilir.



Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. $f(x)$ tək funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunubsa, onda $f(0) = 0$.

Heç də bütün funksiyalar tək və ya cüt funksiya olmur. Əgər funksiyanın təyin oblastı $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrik deyilsə, funksiya nə tək, nə də cütdür.
Təyin oblastı $x = 0$-a nəzərən simmetrik olan funksiya üçün $f(-x) = f(x)$ və $f(-x) = -f(x)$ şərtləri pozulduqda da funksiya nə tək, nə də cütdür.
Funksiyanın tək və ya cüt olduğunu onun qrafikinə, həmçinin analitik ifadəsinə görə müəyyən etmək olar.



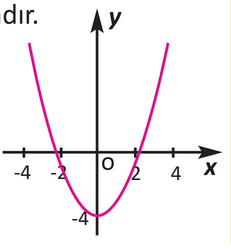
Nümunə 1. Funksiyanın qrafikinə görə tək-cütlüyünü araşdırın.

a) $f(x) = x^2 - 4$

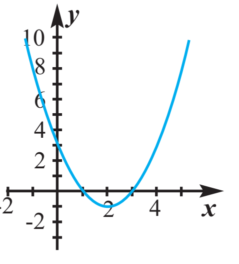
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Həlli:

a) Funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir. Cüt funksiyadır.



b) Funksiyanın qrafiki nə ordinat oxuna nəzərən, nə də koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik deyil. Funksiya nə tək, nə də cütdür.



Nümunə 2. $f(x) = x^2 + x$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.
Həlli: Funksiyanın təyin oblastı olan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $x = 0$ nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir. Lakin, $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ olduğuna görə $f(-x) \neq f(x)$ və $f(-x) \neq -f(x)$. Deməli, verilən funksiya nə tək, nə də cütdür.

Nümunə 3. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 2}$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın.
Həlli: Funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur və

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 2} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 2} = \frac{-(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -\frac{(x^3 - x)}{x^2 + 2} = -f(x)$$

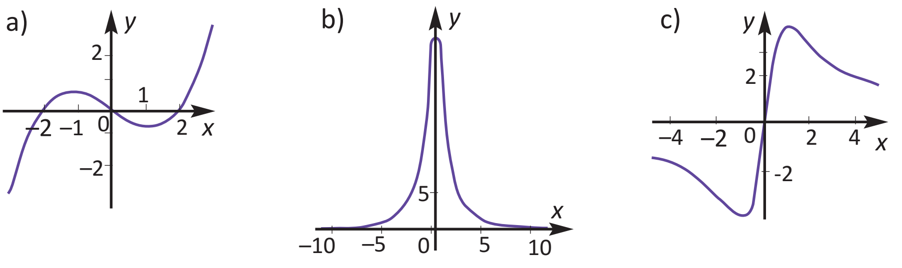
$f(-x) = -f(x)$ olduğundan verilən funksiya tək funksiyadır.

Öyrənmə tapşırıqları

14. Verilən funksiyaların tək-cütlüyünü araşdırın.

a) $f(x) = 5x^3 + x$ b) $f(x) = 5x^3 + x^2 + 4$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3 + 3x}$

15 Qrafikləri verilən funksiyaların tək və ya cüt olduğunu müəyyən edin.

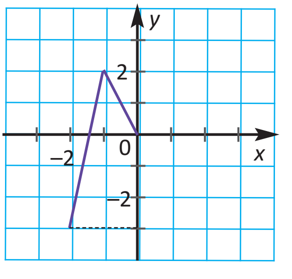


16. Verilən funksiyaların tək-cütlüyünü araşdırın.

$f(x) = -x^2 + 6$	$f(x) = -x^3 + x$	$f(x) = \lvert x\rvert + 4$	$f(x) = x^{-2}$
$f(x) = x^2 + 1$	$f(x) = -3x^2 - 5$	$f(x) = \lvert x^3\rvert$	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$

17. Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası verilmişdir. Tapın:
a) $f(x)$ cüt funksiya və $f(-4) = 7$ olarsa, $f(4)$ qiymətini;
b) $f(x)$ tək funksiya və $f(-4) = 7$ olarsa, $f(4)$ qiymətini;
c) $f(x)$ cüt funksiya və $f(-3) = 8$, $f(5) = -2$ olarsa, $f(3) + f(-5)$ cəmini;
d) $f(x)$ tək funksiya və $f(-2) = 3$, $f(4) = -7$ olarsa, $f(2) + f(0) + f(-4)$ cəmini.

18. Təyin oblastı $[-2; 2]$ olan $f(x)$ funksiyasının qrafikinin bir hissəsi verilib. Qrafiki tamamlayın:
a) $f(x)$ cüt funksiyadırsa;
b) $f(x)$ tək funksiyadırsa.



19. Təyin oblastı verilmiş aralıq olan funksiya tək və ya cüt funksiya ola bilərmi?
a) $[-6; 6]$ b) $(-6; 6)$ c) $(-6; 6]$ d) $[-9; 10)$ e) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

20. $f(x)$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunmuş cüt funksiyadır və $[0;+\infty)$ aralığında artandır.
1) Müqayisə edin:
a) $f(2)$ ilə $f(3)$ b) $f(5)$ ilə $f(7)$ c) $f(-2)$ ilə $f(-3)$ d) $f(-5)$ ilə $f(-7)$
2) $(-\infty; 0]$ aralığında $f(x)$ funksiyası artan, yoxsa azalandır?

21. Təyin oblastı $[-6; 6]$ parçası olan, $x = -4$ nöqtəsində sıfıra çevrilməklə $[-6; 0]$ aralığında artan hər hansı cüt funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin. x-in hansı qiymətlərində $f(x) > 0$ olar?

Əsas funksiyalar

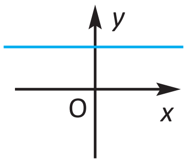
Dəyişən kəmiyyətlər olduqca müxtəlifdir. Lakin ilk baxışdan bir-biri ilə əlaqəsi görünməyən proseslərdə kəmiyyətlərin dəyişmələri təbiətcə eyni olan asılılıqla verilə bilir.

Məsələn, $y = 2x^2 + 1$, $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = -3x^2$ funksiyalarının qrafikləri $y = x^2$ parabolası üzərində aparılan çevrilmələrlə alınır. Ona görə də bu funksiyalar, eləcə də $y = a(x - m)^2 + n$ düsturu ilə verilən bütün funksiyalar üçün əsas funksiya $y = x^2$ hesab edilir.

Aşağıdakı cədvəldə bəzi əsas elementar funksiyaların qrafikləri və onlar haqqında bir sıra məlumatlar verilmişdir.

Sabit funksiya

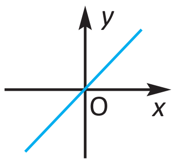
$f(x) = c$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = \{c\}$

Eynilik funksiyası

$f(x) = x$

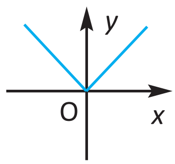


$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$

Sıfrı: $x = 0$
Artan funksiyadır
Ekstremumu yoxdur

Modul funksiyası

$f(x) = |x|$

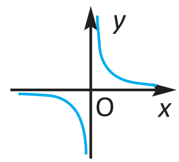


$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$

Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0]\downarrow$, $[0; +\infty)\uparrow$
(0; 0) nöqtəsində minimum

Rasional funksiya

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

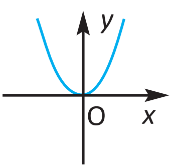


$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Sıfrı yoxdur
$(-\infty; 0)\downarrow$, $(0; +\infty)\downarrow$
Ekstremumu yoxdur

Kvadratik funksiya

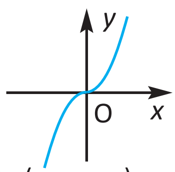
$f(x) = x^2$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0]\downarrow$, $[0; +\infty)\uparrow$
(0; 0) nöqtəsində minimum

Kub funksiyası

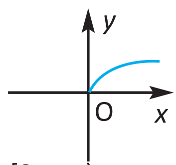
$f(x) = x^3$



$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
Artan funksiyadır
Ekstremumu yoxdur

Kvadrat kök funksiyası

$f(x) = \sqrt{x}$



$D(f) = [0; +\infty)$
$E(f) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$[0; +\infty)\uparrow$
Ekstremumu yoxdur

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilmiş funksiyaların qiymətlər cədvəlini tərtib edin, qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun, ortaq nöqtələrini göstərin.

a) $y = \sqrt{x}$; $y = \dfrac{1}{x}$ b) $y = x$; $y = x^3$ c) $y = x^2$; $y = |x|$

2. (–1; –1), (0; 0), (1; 1) nöqtələri funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, bu qrafikin hansı funksiyaya aid olduğunu düşünürsünüz?

a) Əgər (–1; –1) nöqtəsi (–1; 1) nöqtəsi ilə əvəz edilərsə, uyğun qrafiki hansı funksiya ilə təsvir etmək olar?

b) Əgər (–1; –1) nöqtəsi (9; 3) nöqtəsi ilə əvəz edilərsə,uyğun qrafiki hansı funksiya ilə təsvir etmək olar?

c) Verilmiş nöqtələrə (–2; –8) və (2; 8) nöqtələri əlavə edilsə, uyğun qrafiki hansı funksiya ilə ifadə etmək doğru olardı?

3. *y* və *x* dəyişənləri arasında asılılığın düz mütənasiblik və ya tərs mütənasiblikdən biri olduğu məlumdur. $f(2) = 2$ və $f(4) = 1$ olduğunu bilərək, $y = f(x)$ funksiyasının: a) düsturunu yazın; b) qrafikini qurun.

4. $\dfrac{pV}{T} = const$ (ideal qazın hal tənliyi) düsturunda p, V və T kəmiyyətlərindən hər hansı birini sabit qəbul edərək, digər ikisi arasındakı asılılığın xarakterini müəyyən edin. Bütün hallara baxın. Hər bir hal üçün əsas funksiyanı göstərin.

5. 1) Cədvəllə verilmiş funksiyaların qrafiklərini qurun.
Hər bir funksiya üçün aid olduğu ailənin əsas funksiyasını yazın.

a) Cədvəldə 2012-ci ildən başlayaraq sahibkarın əldə etdiyi illik gəlir (manatla) göstərilmişdir.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7931	8306	8800	9206	9588	10076	10444	10876

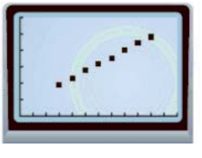
$x = 3$ qiyməti 2012-ci ilə uyğundur. 2022-ci ildə sahibkarın əldə etdiyi gəlir təxminən nə qədər olar?

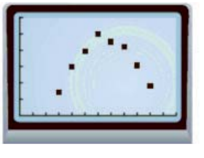
b) Cədvəldə saat 15:00-dan başlayaraq hər növbəti saat ərzində mağazada satılan çörəklərin sayı göstərilmişdir.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	15	30	40	50	45	42	31	18

$x = 3$ qiyməti saat 15:00-a uyğundur.
Saat 17:30-da satılan çörəklərin sayını təxmin edin.

2) Verilmiş qrafiklərdən hər birinin yuxarıdakı situasiyalardan hansına uyğun olduğunu müəyyən edin.

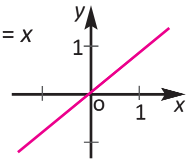
a) 

b) 

$y = x^n$ ($n \in N$) qüvvət funksiyası

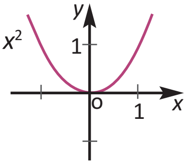
$y = x^n$ ($n \in N$) funksiyasına natural üstlü qüvvət funksiyası deyilir.
$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ olduqda qüvvət funksiyalarının qrafikləri aşağıda verilmişdir.

a) $y = x$



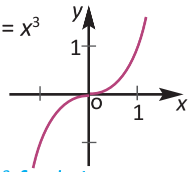
$y = x$ funksiyasının qrafiki düz xətdir.

b) $y = x^2$



$y = x^2$ funksiyasının qrafiki paraboladır.

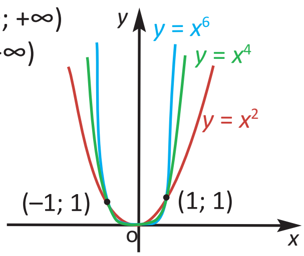
c) $y = x^3$



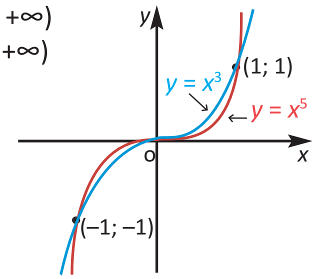
$y = x^3$ funksiyasının qrafiki kub paraboladır.

$y = x^n$ funksiyasının qrafiki n-in istənilən cüt qiymətində ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir və $y = x^2$ parabolasına oxşardır. n-in istənilən tək qiymətində $y = x^n$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir və n-in 1-dən böyük tək qiymətlərində $y = x^3$ -nun qrafiki olan kub parabolaya oxşardır.

$D(x^{2k}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k}) = [0; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; 0] \searrow$
$[0; +\infty) \nearrow$
$x_{min} = 0$;
$f_{min} = 0$



$D(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
$E(x^{2k+1}) = (-\infty; +\infty)$
Sıfrı: $x = 0$
$(-\infty; +\infty) \nearrow$
ekstremumu yoxdur



$n > 1$, $n \in N$ olduqda x^n funksiyasının qrafiki ***n* tərtibli parabola** adlanır.
Qrafiklərdən göründüyü kimi, $n > m$ olduqda $(0; 1)$ aralığında x^n funksiyasının qrafiki x^m funksiyasının qrafikindən aşağıda, $(1; +\infty)$ aralığında isə yuxarıda yerləşir.

Öyrənmə tapşırıqları

6. $x = 0$; $x = -3$; $x = 5$ nöqtələrində funksiyaların qiymətlərini sıfırla müqayisə edin.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = x^5$ c) $f(x) = x^6$

7. Verilmiş funksiyanın qrafiki verilmiş nöqtədən keçirmi?
a) $y = x^4$, A(−2; 16) b) $y = x^5$, B(−2; 32) c) $y = x^5$, $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{32}\right)$

8. Verilmiş funksiyanın qrafiki verilmiş düz xətlə kəsişirmi?
a) $y = x^4$, $y = 2$ b) $y = x^6$, $y = -3$ c) $y = x^5$, $y = 2$ d) $y = x^7$, $y = -3$

9. $f(x) = x^3$ və $g(x) = x^4$ funksiyaları verilmişdir. Müqayisə edin:
a) $f(0,1)$ və $g(0,1)$ b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ və $g\left(\frac{1}{2}\right)$ c) $f(2)$ və $g(2)$

10. $y = x^4$ və $y = 16$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və kəsişmə nöqtələrini göstərin. Qrafik təsvirə görə bərabərsizlikləri həll edin.
a) $x^4 < 16$ b) $x^4 > 16$

Hissə-hissə verilmiş funksiyalar

Real həyati situasiyalarda dəyişən kəmiyyətlər arasındakı asılılıqlar bir çox hallarda bir deyil, bir neçə düstur və bərabərsizliklə ifadə edilir.

Məsələ. Topdansatış mağazasında ən azı 10, ən çoxu 20 idman köynəyi alanlar üçün bir köynəyin qiyməti 3 manat, 20-dən çox köynək alanlar üçün isə bir köynəyin qiyməti 2 manatdır. Satışdan daxil olan pulu C, satılan köynəklərin sayını n qəbul etməklə bu iki kəmiyyət arasındakı asılılığı yazın.

Həlli: Bu situasiyanı $10 \le n \le 20$ olduqda $C(n) = 3 \cdot n$ və $n > 20$ olduqda $C(n) = 2 \cdot n$ funksiyaları ilə ümumi şəkildə aşağıdakı yazılışla ifadə etmək olar:

$$C(n) = \begin{cases} 3 \cdot n & 10 \le n \le 20 \\ 2 \cdot n & n > 20 \end{cases}$$

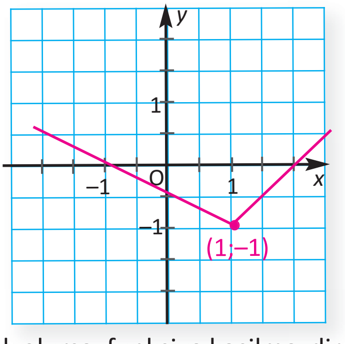
$n = 15$, $n = 20$, $n = 30$, $n = 40$ olduqda $C(n)$ funksiyasının qiymətlərini tapaq.
$n = 15$ və $n = 20$ qiymətləri $10 \le n \le 20$ şərtini ödədiyi üçün əldə olunan pulu $C(n) = 3 \cdot n$ düsturu ilə hesablamalıyıq: $C(15) = 3 \cdot 15 = 45$, $C(20) = 3 \cdot 20 = 60$.
$n = 30$ və $n = 40$ qiymətləri $n > 20$ şərtinə uyğundur.

$$C(30) = 2 \cdot 30 = 60, \qquad C(40) = 2 \cdot 40 = 80.$$

Təyin oblastının müxtəlif aralıqlarında müxtəlif düsturlarla verilən funksiyalara **hissə-hissə verilmiş funksiyalar** deyilir.

Nümunə 1. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x < 1 \text{ olduqda} \\ x - 2, & x \ge 1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

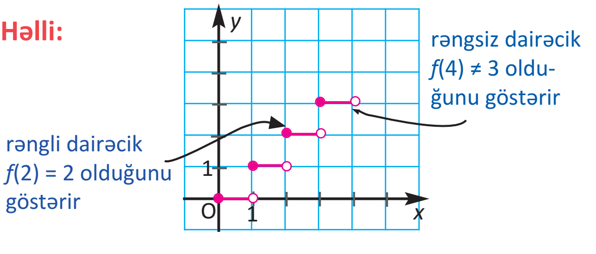


Həlli: Bu funksiyanın qrafiki $x = 1$ nöqtəsindən solda $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ düz xəttinin, $x = 1$-dən sağda isə $y = x - 2$ düz xəttinin üzərinə düşür.
$f(1) = -1$ olduğuna görə verilən funksiyanın qrafiki təpəsi $(1; -1)$ nöqtəsində olan sınıq xətdir.
Qələmi "vərəqdən ayırmadan" qrafiki təsvir etmək olursa, funksiya kəsilməzdir deyilir. Nümunədə verilən funksiya kəsilməzdir.

Nümunə 2. $f(x)$ funksiyasının qrafikini qurun.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ əgər } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ əgər } 1 \le x < 2 \\ 2, \text{ əgər } 2 \le x < 3 \\ 3, \text{ əgər } 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Həlli:



Hər bir ədədə bu ədədin tam hissəsini qarşı qoyan tam hissə funksiyası $f(x) = [x]$ kimi yazılır. Qurulan qrafik tam hissə funksiyasının $[0; 4)$ aralığındakı qrafikidir.

Öyrənmə tapşırıqları

11. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qiymətlərini arqumentin verilən qiymətlərində hesablayın.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \le 4 \\ 3x + 5, & x > 4 \end{cases}$$

a) $x = 1{,}5$ b) $x = 4$ c) $x = -2$ d) $x = 12$

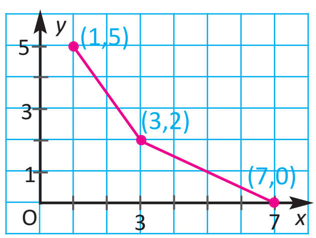
12. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ funksiyası verilmişdir. Tapın:

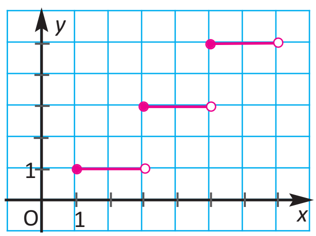
a) $f(-2)$ b) $f(-1)$ c) $f(0)$ d) $f(1)$ e) $f(4)$

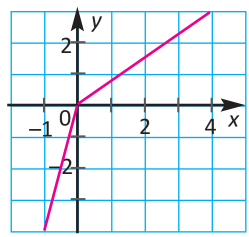
13. Hissə-hissə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun. Qrafikinə görə funksiyanın kəsilməzliyini araşdırın.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -3 \le x < 1 \\ 3x - 1, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 4, & 0 \le x < 2 \\ 5, & 2 \le x < 4 \\ 6, & 4 \le x < 6 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$

14. Qrafiki verilmiş hissə-hissə funksiyanı düsturla yazın.

a)


b)


c)


15. $M(x)$ funksiyası çap edilən fotoşəkillərin x sayından asılı olaraq ödənilən məbləği (manatla) göstərir.

$$M(x) = \begin{cases} 0{,}15x, & 0 < x \le 25 \\ 0{,}10x, & 26 \le x \le 100 \\ 0{,}07x, & 101 \le x \le 500 \\ 0{,}05x, & 501 \le x \end{cases}$$

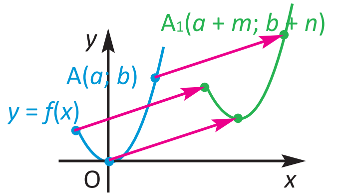
1) 20 fotoşəklin çapı üçün ödənilən məbləği tapın.
2) “150 şəkil çapı üçün 10 manatdan az ödəmək lazımdır” fikri doğrudurmu?
3) 40 manata neçə fotoşəkil çap etmək olar?

16. Şirkət işçilərə həftəlik maaşı iş saatına görə aşağıdakı şərtlərlə ödəyir: Əgər işçi həftə ərzində 40 saata qədər işləyərsə, hər iş saatı üçün 8 manat, 40 saatdan artıq hər iş saatı üçün bu normadan 1,5 dəfə çox məvacib alır.
a) Bu şirkətdə işçiyə verilən məvacibi hissə-hissə funksiya şəklində yazın.
b) Həftədə 48 saat işləmiş işçi neçə manat məvacib almalıdır?

Paralel köçürmə

Paralel köçürmədə qrafikin bütün nöqtələri verilən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişir.

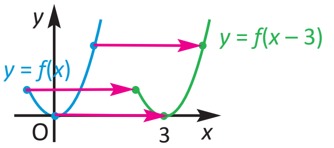
$y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin hər bir nöqtəsini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürək: $A(a; b) \to A_1(a + m; b + n)$.



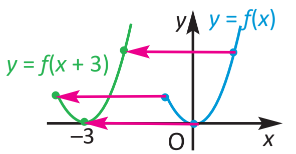
A nöqtəsinin koordinatları $b = f(a)$ bərabərliyini ödədikdə A_1 nöqtəsinin koordinatları $y - n = f(x - m)$ bərabərliyini ödəyir. Yəni $y = f(x)$ funksiyasının qrafikini $\langle m; n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürdükdə $y = f(x - m) + n$ funksiyasının qrafiki alınır: verilən qrafik üfüqi istiqamətdə $|m|$ vahid ($m > 0$ olduqda sağa, $m < 0$ olduqda sola), şaquli istiqamətdə $|n|$ vahid ($n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı) sürüşdürülür.

$n = 0$ halında qrafik yalnız üfüqi istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x - m)$ olur.

Nümunə.



3 vahid sağa

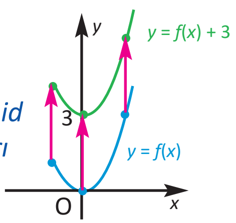


3 vahid sola

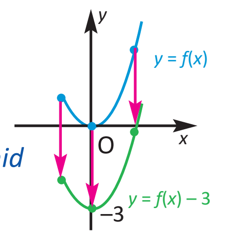
$m = 0$ halında qrafik yalnız şaquli istiqamətdə paralel köçürülür və yeni funksiya $y = f(x) + n$ olur.

Nümunə.

3 vahid yuxarı



3 vahid aşağı



Öyrənmə tapşırıqları

1. Hər bir funksiya üçün m və n-nin qiymətini müəyyən edin. Sürüşmənin üfüqi və ya şaquli olduğunu yazın.

a) $y - 4 = f(x)$ b) $y = f(x) - 4$ c) $y = f(x + 1)$ d) $y + 3 = f(x - 7)$

2. Üçhədlidən tam kvadrat ayırmaqla, verilən funksiyaların qrafiklərinin $y = x^2$ funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə alındığını izah edin.

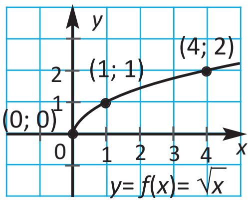
a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

Nümunə. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə verilən funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $g(x) = \sqrt{x} - 1$ b) $h(x) = \sqrt{x - 1}$ c) $m(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

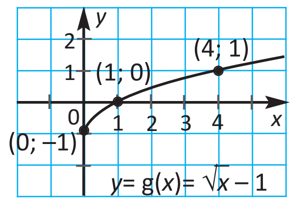
Həlli: Əvvəlcə $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının təyin oblastından, $[0; +\infty)$ aralığından tam kvadrat olan üç qiymət (0; 1; 4) seçməklə cədvəl tərtib edək və qrafikini quraq.

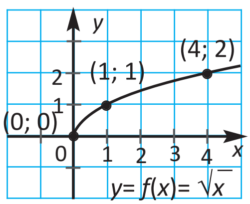
x	$f(x)$	$(x; f(x))$
0	0	(0; 0)
1	1	(1; 1)
4	2	(4; 2)

a) 

$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid aşağı sürüşdürülür, qrafikin üzərindəki hər bir nöqtənin ordinatından 1 çıxılır.

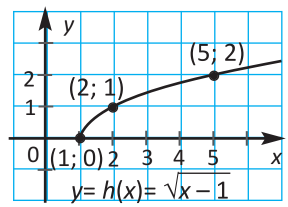
$g(x) = f(x) - 1$

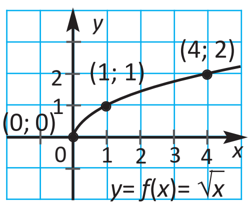


b) 

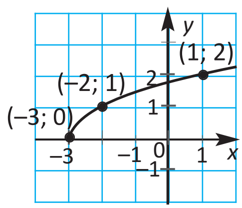
$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki 1 vahid sağa sürüşdürülür.

$h(x) = f(x - 1)$



c) 

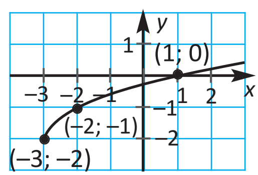
$f(x) = \sqrt{x}$



$y = m_1(x) = f(x + 3) = \sqrt{x + 3}$

qrafik 3 vahid sola sürüşdürülür.

$m_1(x) = f(x+3)$



$y = m(x) = m_1(x) - 2 =$
$= \sqrt{x + 3} - 2$

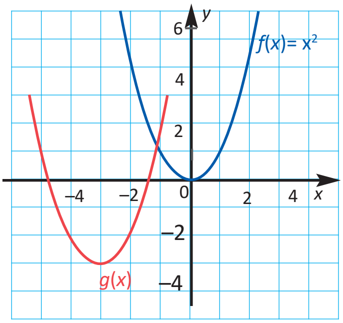
qrafik 2 vahid aşağı sürüşdürülür.

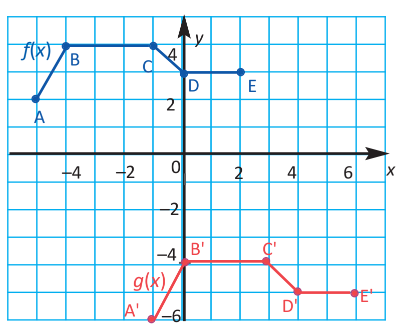
$m(x) = f(x+3) - 2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Hər bir çevrilməni sözlə yazın.

a) $g(x) = \sqrt{x} - 3$ b) $h(x) = \sqrt{x - 2}$ c) $m(x) = \sqrt{x - 1} + 2$

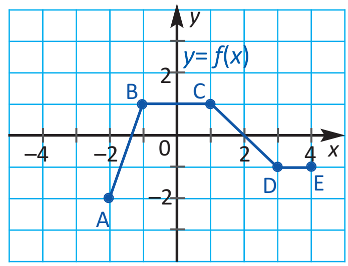
4. Qrafiklərinə görə $f(x)$ funksiyasının $g(x)$ funksiyasına çevrilməsini təqdim edin.
a) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına aid 5 nöqtənin koordinatlarının uyğunluğunu yazın.
b) Çevrilmədən alınan $g(x)$ funksiyasını $y = f(x - m) + n$ şəklində yazın.

1) 

2) 

5. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə görə hər bir çevrilmə üçün:
- A, B, C, D və E nöqtələrinin çevrildikləri nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edin.
- Çevrilmədən alınan funksiyanın qrafikini çəkin.

a) $g(x) = f(x) + 2$ b) $g(x) = f(x - 3)$
c) $g(x) = f(x + 1)$ d) $g(x) = f(x) - 4$



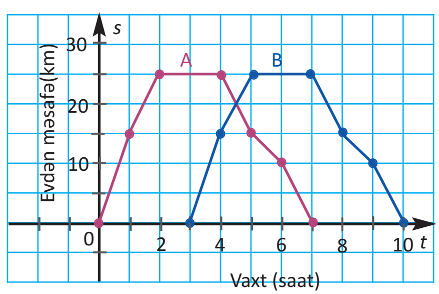
6. Hər bir paralel köçürmə üçün m və n-in qiymətini müəyyən edin və çevrilmədən alınan funksiyanı $y = f(x - m) + n$ şəklində yazın. Hər bir funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu haqqında fikirlərinizi yazın.
a) $f(x) = |x|$, 4 vahid sola və 2 vahid aşağı;

b) $f(x) = x^2$, 6 vahid sağa və 4 vahid yuxarı.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiyası $x = 0$ nöqtəsində təyin olunmayıb.
a) $f(x - 3)$ funksiyası hansı nöqtədə təyin olunmayıb?
b) $f(x)$ və $f(x - 3)$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

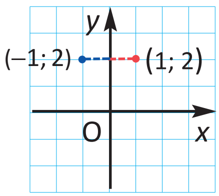
8. Rəngsaz evin, sahəsi ***s*** olan divarlarını boyamaq üçün lazım olan boya miqdarını $n = f(s)$ funksiyası ilə müəyyən edə bilər. $n = f(s) + 10$ və $n = f(s + 10)$ dəyişmələrini situasiyaya uyğun təqdim edin.

9. Ülkər evdən çıxdı, velosipedlə şəhər kənarındakı gölə getdi və geri qayıtdı. O, getdiyi yolu və sərf etdiyi vaxtı A qrafiki ilə göstərdi.
a) Ülkər evdən 2 saat sonra çıxsaydı, bu qrafik necə dəyişərdi?
b) Şəkildəki B qrafikini situasiyaya uyğun necə təqdim edərdiniz?



Əksetmə

Ordinat oxuna nəzərən
Qrafikin hər bir nöqtəsi *y* oxuna nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.

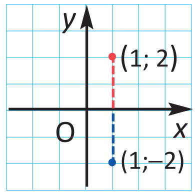


(1; 2) → (–1; 2)

(*x*; *y*) → (–*x*; *y*)

Nöqtənin ordinatı olduğu kimi qalır, absisi isə işarəsini dəyişir.

Absis oxuna nəzərən
Qrafikin hər bir nöqtəsi *x* oxuna nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.

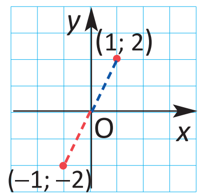


(1; 2) → (1; –2)

(*x*; *y*) → (*x*; –*y*)

Nöqtənin absisi olduğu kimi qalır, ordinatı isə işarəsini dəyişir.

Koordinat başlanğıcına nəzərən. Qrafikin hər bir nöqtəsi koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik nöqtəyə çevrilir.



(1; 2) → (–1; –2)

(*x*; *y*) → (–*x*; –*y*)

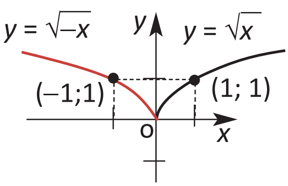
Nöqtənin hər iki koordinatının işarəsi dəyişir.

Funksiyaların qrafiklərinin əksetməsi.

y oxuna nəzərən

$f(x) \to f(-x)$

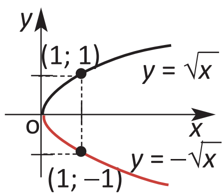
$(x; y) \to (-x; y)$



x oxuna nəzərən

$f(x) \to -f(x)$

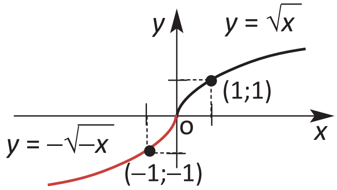
$(x; y) \to (x; -y)$



Koordinat başlanğıcına nəzərən

$f(x) \to -f(-x)$

$(x; y) \to (-x; -y)$



Öyrənmə tapşırıqları

10. Verilmiş nöqtələrin: a) *x* oxuna; b) *y* oxuna nəzərən əksetmədə çevrildiyi nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edin, yeni koordinatları yazın.

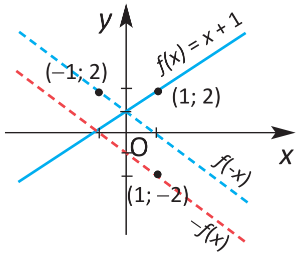
A(5; 3), B(–5; –5), C(0; –3), D(–6; 2), F(9; 0)

11. Hər bir funksiya üçün əsas funksiyanı və çevrilmələri yazın.

a) $y = -x^2$ b) $y = -\sqrt{x}$ c) $y = -\dfrac{1}{x}$ d) $y = \sqrt{-x}$

12. Verilən funksiyanın qrafikinin koordinat oxlarına nəzərən əksetməsinə görə $-f(x)$ və $f(-x)$ funksiyalarının qrafiklərini təsvir edin.

Nümunə. a) $f(x) = x + 1$



a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = -x + 3$

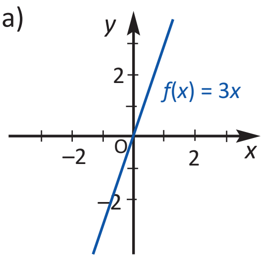
c) $f(x) = (x - 1)^2$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

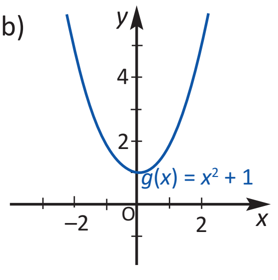
13. $y = -(x+1)^2 + 3$ funksiyasının qrafikinin $y = x^2$ parabolasından hansı çevrilmələrlə alındığını addım-addım yazın. Hər bir addımı qrafik olaraq təsvir edin.

14. Qrafiklərə görə tapşırıqları yerinə yetirin.
1) Absis oxuna nəzərən əksetmədən alınan funksiyaları düsturla yazın.
2) Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

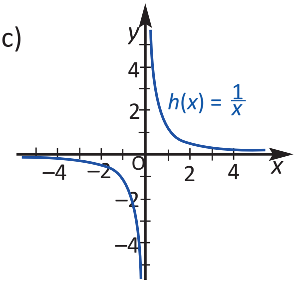
a)



b)

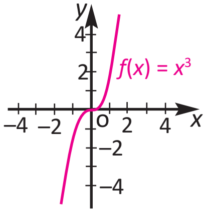


c)



15. Əsas funksiyanın qrafikinə görə tələb olunan funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) Əsas funksiya: $f(x) = x^3$



a) $f(x) = (x + 1)^3$

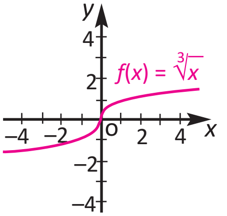
b) $f(x) = x^3 - 4$

c) $f(x) = -x^3$

d) $f(x) = -(x - 2)^3$

e) $f(x) = -x^3 + 3$

2) Əsas funksiya: $g(x) = \sqrt[3]{x}$



a) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

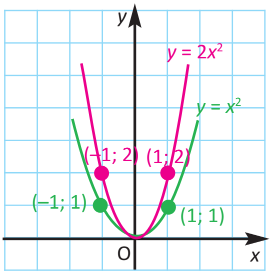
c) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{-x}$

e) $g(x) = -\sqrt[3]{x} - 3$

Qrafiklərin dartılması və sıxılması

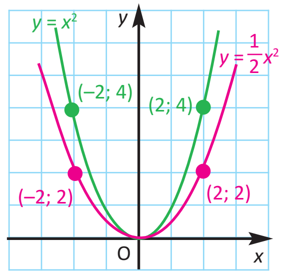
x oxundan 2 dəfə dartılma



(1; 1) → (1; 2)

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə absis oxundan 2 dəfə uzaqlaşıb

x oxuna 2 dəfə sıxılma



(2; 4) → (2; 2)

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə absis oxuna 2 dəfə yaxınlaşıb

Absis oxundan dartılma və sıxılmada nöqtənin absisi eyni qalmaqla ordinatı dəyişir:

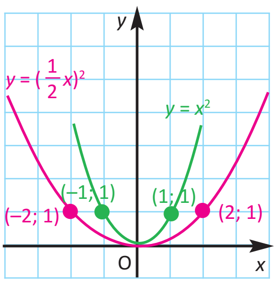
$$(a; b) \to (a; l \cdot b)$$

A(a; b) nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərindədirsə, $b = f(a)$.
Onda $A_1(a; l \cdot b)$ nöqtəsi $y = l \cdot f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.

$y = l \cdot f(x)$ funksiyasının qrafiki $f(x)$-in qrafikini $l > 1$ olduqda absis oxundan l dəfə dartmaqla, $0 < l < 1$ olduqda isə absis oxuna $\frac{1}{l}$ dəfə sıxmaqla alınır.

---

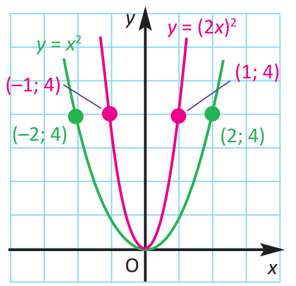
y oxundan 2 dəfə dartılma



(1; 1) → (2; 1)

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə ordinat oxundan 2 dəfə uzaqlaşıb

y oxuna 2 dəfə sıxılma



(2; 4) → (1; 4)

Qrafik üzərindəki hər bir nöqtə ordinat oxuna 2 dəfə yaxınlaşıb

Ordinat oxundan dartılma və sıxılmada nöqtənin ordinatı eyni qalmaqla absisi dəyişir: $(a; b) \to (k \cdot a; b)$

A(a; b) nöqtəsi $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərindədirsə, $b = f(a)$.
Onda $A_1(k \cdot a; b)$ nöqtəsi $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.

$y = f\left(\frac{x}{k}\right)$ funksiyasının qrafiki $f(x)$-in qrafikini $k > 1$ olduqda ordinat oxundan k dəfə dartmaqla, $0 < k < 1$ olduqda isə ordinat oxuna $\frac{1}{k}$ dəfə sıxmaqla alınır.

Öyrənmə tapşırıqları

16. Funksiyaların qrafiklərinin əsas funksiyanın qrafikindən hansı çevrilmələrlə alındığını yazın.

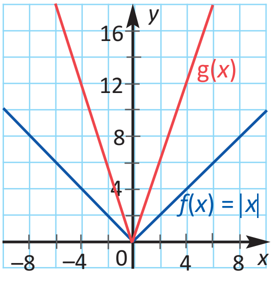
a) $y = 2x^2$ b) $y = 2(x-1)^2$ c) $y = 3|x|$ d) $y = -|3x|$

17. Funksiyalar bir-birindən müəyyən çevrilmələrlə alınmışdır. Bu çevrilmələri təsvir edin.

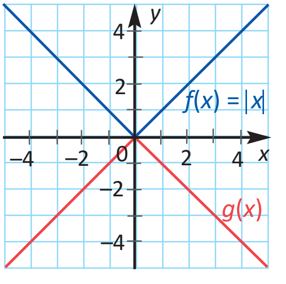
$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow g(x) = 2\sqrt{x} \longrightarrow h(x) = 2\sqrt{x-2} \longrightarrow k(x) = -2\sqrt{x-2} + 3$

18. g(x) funksiyasının qrafiki *f*(x) funksiyasının qrafikinin çevrilməsi ilə alınmışdır. *g*(*x*) funksiyasının düsturunu yazın.

a)



b)



19. Hər bir funksiyanın qrafikinin verilmiş *f*(*x*) əsas funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə alındığını yazın.

1) $f(x) = x^2$ a) $y = 2x^2 + 3$ b) $y = 2(x-3)^2$ c) $y = 2(x-1)^2 + 3$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ a) $y = 2\sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{2x}$ c) $y = 2\sqrt{x-1} + 1$

20. **Açıq tipli sual.** Verilən *f*(*x*) əsas funksiyasına görə tələb edilən çevrilmələrlə alınan funksiyaları yazın.

a) Paralel köçürülmüş: • sola • sağa • yuxarı • aşağı
b) əks edilmiş: • *x* oxuna nəzərən • *y* oxuna nəzərən
c) dartılmış: • *x* oxundan • *y* oxundan
d) sıxılmış • *x* oxuna • *y* oxuna

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = |x|$ 3) $f(x) = \sqrt{x}$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$

21. **Tətbiqi sənət.** Xalçalar üzərində müəyyən qrafiklərin çevrilmələri ilə yaradılan naxışları müşahidə etmək olar.
Şəkildəki kilimin üzərində hansı funksiyaların çevrilmələrini təqdim etmək mümkündür?

Araşdırma. 1 *l* benzinin qiyməti 0,95 manatdır. Fəridin avtomobili hər kilometrə 0,08 *l* benzin sərf edir.

a) 50 km yola sərf olunan benzin üçün Fəridin xərclədiyi pulu necə hesablaya bilərsiniz? Bu hesablamanı neçə addımda yerinə yetirmək olar?

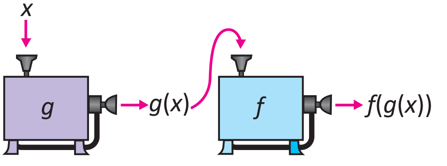
b) Sərf olunan benzinin qət edilən yoldan asılılığını göstərən $V(d)$ funksiyasını yazın.

c) Benzinə xərclənən pulun onun həcmindən asılılığının $M(V)$ funksiyasını yazın.

d) Fəridin qət etdiyi yolda benzinə xərclədiyi pulu göstərən $M(d)$ funksiyasını b) və c) bəndlərindəki funksiyalardan istifadə etməklə yazın. Burada arqumentin qiymətlərini hansı dəyişənin qiymətləri təşkil edir?

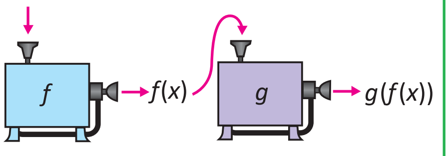
Mürəkkəb funksiya

Bir çox hallarda funksiyanın arqumentinin ala bildiyi qiymətlər digər funksiyanın qiymətləri ilə müəyyən edilir. Tutaq ki, f və g funksiyaları verilmişdir. İki situasiyanı sxematik təsvirlər üzərində nəzərdən keçirək.



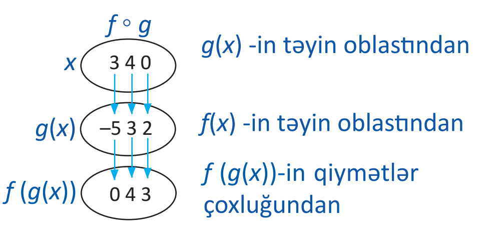
1. x dəyişəninin qiymətləri g funksiyasının təyin oblastına, g(x)-lər isə f funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda hər $x \in D(g)$ ədədinə $f(g(x))$ ədədini qarşı qoyan funksiyaya f və g funksiyalarının mürəkkəb funksiyası (kompozisiyası) deyilir və $(f \circ g)(x)$ kimi yazılır:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

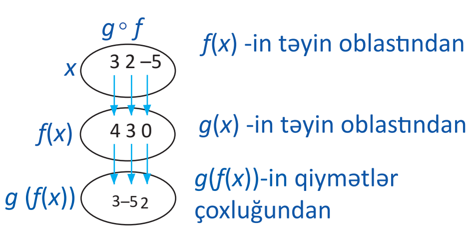


2. x dəyişəninin qiymətləri f funksiyasının təyin oblastına, $f(x)$-lər isə g funksiyasının təyin oblastına daxildir. Bu halda g və f funksiyalarının kompozisiyası $(g \circ f)(x)$ kimi yazılır: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Diqqət edin! $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ yazılışları (həmçinin $f(g(x))$ və $g(f(x))$ yazılışları) iki müxtəlif mürəkkəb funksiyanı ifadə edir. $f(g(x))$ kompozisiyası $E(g) \subset D(f)$ olduqda, $g(f(x))$ kompozisiyası isə $E(f) \subset D(g)$ olduqda qurula bilər.



$f(g(x)) = \{(3;0), (4;4), (0;3)\}$



$g(f(x)) = \{(3;3), (2;–5), (–5;2)\}$

Sxematik təsvirdən də göründüyü kimi, $f(g(x))$ mürəkkəb funksiyası $f(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $g(x)$ yazmaqla alınır. Eyni qayda ilə $g(f(x))$ kompozisiyası $g(x)$ funksiyasında x arqumentinin əvəzinə $f(x)$ yazmaqla alınır.

Nümunə 1. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$ olduqda:
a) $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının düsturlarını yazın;
b) $x = 3$ qiymətində $(f \circ g)(x)$ və $(g \circ f)(x)$ kompozisiyalarının qiymətlərini hesablayın.

Həlli: a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x - 3) = x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 - 2x - 1$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 - 2(x + 2) - 3 = x^2 + 2x - 3$
Deməli, $f(g(x)) = x^2 - 2x - 1$ və $g(f(x)) = x^2 + 2x - 3$
b) $(f \circ g)(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$ $(g \circ f)(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

Nümunə 2. $h(x) = f(g(x))$ olarsa, verilənlərə görə $f(x)$ funksiyasını düsturla yazın. a) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$; $g(x) = x - 2$
b) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$; $g(x) = x^3 + 1$

Həlli:
a) $f(g(x)) = (g(x))^2 + g(x) + 1$ olduğundan $f(x) = x^2 + x + 1$
b) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$ olduğundan $f(x) = \sqrt{x}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. $f(x) = x^2$ və $g(x) = \sqrt{x} - 1$ funksiyaları verilmişdir. Tapın:
a) $f(g(4))$; b) $g(g(25))$; c) $g(f(3))$; d) $g(g(4))$; e) $f(f(-3))$.

2. $f(x) = 4x$, $g(x) = 2x^2 - 1$ və $h(x) = x^2 + 1$ funksiyalarına görə hesablayın.
a) $f(g(-1))$ b) $h(g(2))$ c) $g(f(3))$
d) $f(h(-4))$ e) $g(g(-2))$ f) $f(f(-3))$
g) $(f \circ (h \circ g))(1)$ h) $(h \circ (g \circ f))(\frac{1}{2})$ i) $(f \circ (g \circ h))(2)$

3. $f(x) = 2x + 1$ və $g(x) = x^2 - 3$ funksiyalarına görə mürəkkəb funksiyaları düsturla yazın.
a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. Verilən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyasına görə $f(g(x))$ və $g(f(x))$ funksiyalarının düsturunu yazın.
a) $f(x) = 1 - x^2$ və $g(x) = 2x + 5$ b) $f(x) = 2x$ və $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ və $g(x) = x^2 + 2$ d) $f(x) = x^2 + 1$ və $g(x) = \frac{2}{x}$
e) $f(x) = x^3 - 4$ və $g(x) = \sqrt[3]{x + 4}$ f) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ və $g(x) = x + 1$

5. a) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ olduqda, $f(g(x)) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.
b) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x + 1$ olduqda, $f(g(x)) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

6. $f(x) = |x|$ və $g(x) = x - 1$ funksiyaları verilmişdir.
a) $y = f(g(x))$; b) $y = g(f(x))$ kompozisiyalarının qrafiklərini qurun.
Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

7. a) $f(x) = 2x - 1$ və $g(x) = x^2$ funksiyalarına görə $f(g(x))$ funksiyasının düsturunu yazın.
b) $f(x)$, $g(x)$, və $f(g(x))$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.
c) $f(g(x))$ funksiyasının qrafikini $g(x)$ funksiyasının qrafikinin çevrilməsi kimi təqdim edin.

8. $h(x) = f(g(x))$ olarsa, verilənlərə görə $f(x)$ funksiyasını düsturla yazın.

a) $h(x) = (x + 1)^2 - 5(x + 1)$, $g(x) = x + 1$ b) $h(x) = x^2 + 4x + 3$, $g(x) = x + 2$

c) $h(x) = \sqrt{2x + 3}$, $g(x) = x + 1$ d) $h(x) = x + \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$

9. a) $f(x - 1) = x + 3$ olarsa, $f(1)$, $f(4)$, $f(-1)$, $f(0)$ qiymətlərini tapın.
$f(x)$ funksiyasının düsturunu yazın.
b) $f(x + 1) = 2x + 3$ olarsa, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(0)$ qiymətlərini tapın.
$f(x)$ funksiyasının düsturunu yazın.

10. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ funksiyası verilmişdir.
a) $f(x)$ funksiyasının təyin oblastını tapın, qiymətlər cədvəlini tərtib edərək, qrafikini qurun.
b) $f(2x)$ funksiyasının düsturunu yazın, təyin oblastını tapın.

11. $f(x)$ funksiyasının təyin oblastı $[-1; 3]$ olarsa, aşağıdakı funksiyanın təyin oblastını tapın.
a) $f(2x)$ b) $f(\frac{1}{2}x)$ c) $f(-x)$ d) $f(x - 1)$

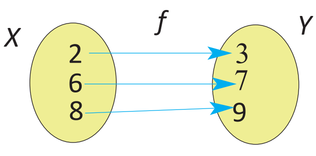
12. **İstehsalat.** Mebel istehsal edən şirkətin 2012-ci ildən etibarən həftəlik istehsal etdiyi stulların sayını $N(t) = 144 + 25t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Burada t illərlə vaxtı ($t = 0$ qiyməti 2012-ci ilə uyğundur), N stulların sayını göstərir. İşçi qüvvəsinin həcminin bu halda $W(N) = 3\sqrt{N}$ kimi olduğu müəyyən edilmişdir.
a) İşçi qüvvəsinə tələbatın zamandan asılılıq funksiyasını yazın.
b) Bu funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu real həyati situasiyaya uyğun təqdim edin.

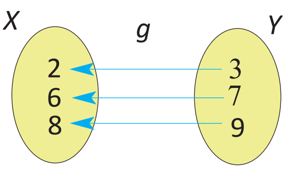
Araşdırma. **1.** a) Tərəfinin uzunluğu *a* olan kvadratın sahə düsturunu yazın.
b) Verilən sahəyə görə kvadratın tərəfinin uzunluğunu tapın.
2. Yer səthindən v_0 sürətilə yuxarı atılmış cismin yerdən məsafəsi $h = v_0 t - \frac{g t^2}{2}$ düsturu ilə tapılır. *h*-ın verilmiş qiymətinə görə *t*-ni birqiymətli tapmaq olarmı?

Tərs funksiya

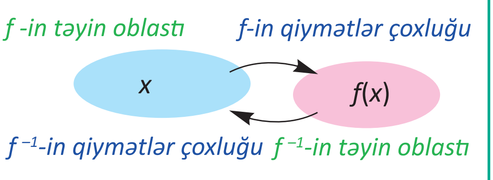
Verilən *f* funksiyası üçün tərs uyğunluq da funksiya olarsa, *f*-ə dönən funksiya deyilir. *f* funksiyasının tərsi f^{-1} ilə işarə edilir.

Nümunə 1. Şəkildə *X* çoxluğu ilə *Y* çoxluğu arasındakı *f* uyğunluğu oxlarla verilmişdir. Oxların istiqamətini dəyişsək, başqa uyğunluq – *Y* çoxluğu ilə *X* çoxluğu arasındakı *g* uyğunluğunu alarıq. *g* uyğunluğu *f*-ə tərs uyğunluqdur.





Nümunə 2. $f(x) = x + 4$ funksiyası ilə
A = {1, 2, 3, 4} çoxluğundan
B = {5, 6, 7, 8} çoxluğunun alınmasını
aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.
$f(x) = x + 4$: {(1; 5), (2; 6), (3; 7), (4; 8)}



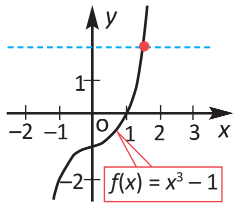
Bu funksiyanın tərsi olan f^{-1} funksiyası isə B çoxluğundan A çoxluğunun elementlərinin alınmasını ifadə edir və onu
$f^{-1}(x) = x - 4$: {(5; 1), (6; 2), (7; 3), (8; 4)} kimi ifadə etmək olar.
$f(x)$ və $f^{-1}(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Sxematik təsvirdən və koordinat cütlərindən göründüyü kimi, verilən funksiyanın təyin oblastı tərs funksiyanın qiymətlər çoxluğu, verilən funksiyanın qiymətlər çoxluğu isə tərs funksiyanın təyin oblastı olur və əksinə.
Yəni, $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$. Buradan alınır ki, $f(f^{-1}(x)) = x$ və $f^{-1}(f(x)) = x$
Nümunədə verilənlərə görə: $f(f^{-1}(x)) = f(x - 4) = (x - 4) + 4 = x$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 4) = (x + 4) - 4 = x$

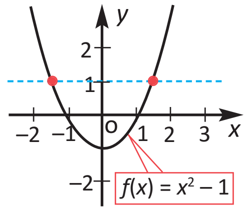
İstənilən funksiya üçün tərs funksiyanın varlığı həmişə mümkündürmü? Məsələn, $y = 2x + 5$ münasibətindən *x*-i *y* vasitəsilə birqiymətli ifadə etmək mümkündür və bu halda tərs funksiya var: $x = \frac{y - 5}{2}$.

Burada *y*-in hər bir qiymətinə *x*-in yalnız bir qiyməti uyğun gəlir.

$y = x^2$ funksiyasında isə y-in bir qiymətinə, məsələn, $y = 9$ qiymətinə arqumentin $x = 3$, və $x = -3$ kimi iki qiyməti uyğun gəldiyindən, $(-\infty; +\infty)$ aralığında bu funksiyanın tərsi yoxdur. Özünün hər bir qiymətini təyin oblastının yalnız bir nöqtəsində alan funksiyaya tərsi olan (dönən) funksiya deyilir. İstənilən üfüqi düz xətt funksiyanın qrafikini ən çoxu bir nöqtədə kəsərsə, bu funksiyanın tərsi var.



tərsi var



tərsi yoxdur

Başqa sözlə, x-in müxtəlif qiymətlərinə y-in müxtəlif qiymətləri uyğun olarsa, $y = f(x)$ funksiyasının tərsi var. Artan (və ya azalan) funksiyalar üçün $x_1 \neq x_2$ olduqda $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan alırıq:

1) Təyin oblastında artan funksiyanın tərsi var.

2) Təyin oblastında azalan funksiyanın tərsi var.

Tutaq ki, $y = f(x)$ tərsi olan funksiyadır, yəni $y = f(x)$ münasibətindən x-i y vasitəsilə birqiymətli ifadə edərək, $x = f^{-1}(y)$ kimi yazmaq mümkündür.

Onda $x = f^{-1}(y)$ funksiyasına $y = f(x)$ funksiyasının tərs funksiyası deyilir.

Adətən, arqumenti x ilə, funksiyanı y ilə işarə edirlər. Ona görə də $y = f(x)$-in tərs funksiyasını $y = f^{-1}(x)$ şəklində yazırlar. Əgər f^{-1} funksiyası f -in tərs funksiyasıdırsa, onda f funksiyası da f^{-1} -in tərs funksiyası olur.

Yəni, f və f^{-1} qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri

$(a; b)$ nöqtəsi verilən funksiyanın qrafiki üzərindədirsə, $y = x$ düz xəttinə nəzərən bu nöqtəyə simmetrik olan $(b; a)$ nöqtəsi tərs funksiyanın qrafiki üzərində olur.

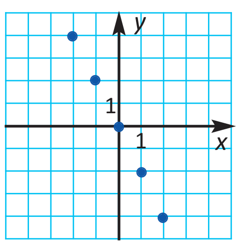
Verilən funksiya

x	−2	−1	0	1	2
y	4	2	0	−2	−4

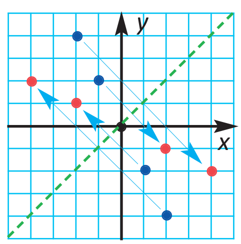
Tərs funksiya

x	4	2	0	−2	−4
y	−2	−1	0	1	2

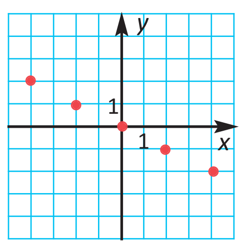
Verilən funksiyanın qrafiki



$y = x$ oxuna nəzərən əksetmə nümunələri



Tərs funksiyanın qrafiki



Qarşılıqlı tərs funksiyaların qrafikləri $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir.

Düsturla verilmiş funksiyanın tərs funksiyasını tapmaq üçün:

1) Verilmiş bərabərlikdən x dəyişəni y-lə ifadə edilir.

2) Alınmış bərabərlikdə x-in əvəzinə y, y-in əvəzinə x yazılır.

Nümunə 3. $y = 2x - 3$ funksiyasına tərs funksiyanın düsturunu yazın.

Həlli: Verilən funksiya yazılır:

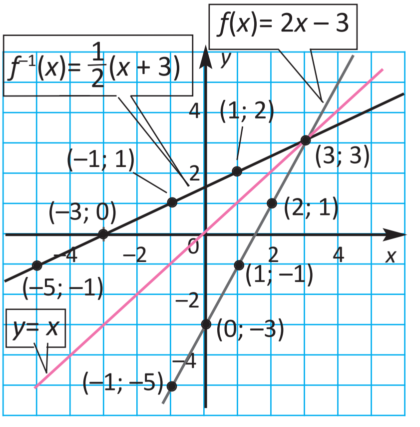
$$y = 2x - 3$$

x dəyişəni y-dən asılı ifadə edilir:

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

x-lə y-in yeri dəyişdirilir:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$



$y = x^2$ funksiyasının bütün ədəd oxunda tərsi yoxdur. Lakin artma və ya azalma aralıqlarının hər birində bu funksiyanın tərsi var.

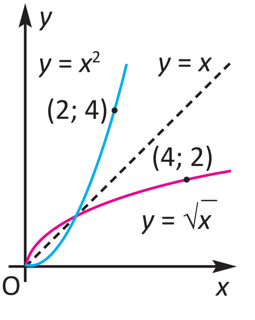
Nümunə 4. $y = x^2, x \geq 0$ funksiyasının tərsi olan funksiyanı müəyyən edin, qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

Bu qrafiklər üzərində yerləşən bir neçə nöqtənin koordinatlarını yazın.

Həlli: Verilən funksiya: $y = x^2, x \geq 0$.

Tərs funksiya: 1) $x = \sqrt{y}$, 2) $y = \sqrt{x}$

(2; 4) nöqtəsi $y = x^2$ funksiyasının, (4; 2) nöqtəsi isə $[0; +\infty)$ aralığında onun tərsi olan $y = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafiki üzərində yerləşir.



Tərs funksiya haqqında aşağıdakı teorem doğrudur:

Təyin oblastı X, qiymətlər çoxluğu Y aralığı olan f funksiyası artandırsa (azalandırsa), tərsi var və Y aralığında təyin olunan f^{-1} tərs funksiyası da artandır (azalandır).

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiya cədvəllə verilmişdir. Tərs funksiyaya uyğun qiymətlər cədvəlini qurun.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	–1	–2	–3	–4	–5

2. $f(x)$ və $g(x)$ qarşılıqlı tərs funksiyalardır. $x = 10$ olduqda $f(x)$ funksiyasının qiyməti 85 olur. Bu qiymətləri $g(x)$ funksiyasına necə aid etmək olar?

3. f funksiyasının qrafiki üzərində ordinatları eyni olan nöqtələrin olduğu məlumdur (məsələn, (6; 5) və (7; 5) kimi).
f funksiyasının dönən olub-olmadığını bilmək üçün bu kifayətdirmi?

4. $f(x)$ tərsi olan funksiya və $f(1) = 7$; $f(-3) = 9$, $f(6) = 2$ olarsa, tərs funksiyanın $f^{-1}(9)$; $f^{-1}(7)$ və $f^{-1}(2)$ qiymətlərini tapın.

5. Verilən funksiyalarla qarşılıqlı tərs funksiyaları yazın. Verilən funksiya və onun tərs funksiyası artan, yoxsa azalandır?

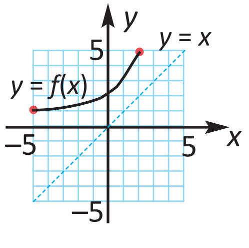
a) $y = 4x$ b) $y = 2x - 8$ c) $y = -2x + 5$

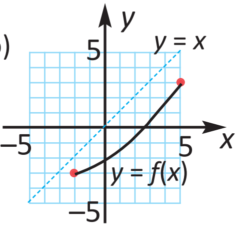
d) $y = 12x + 6$ e) $y = -\frac{2}{3}x$ f) $y = \frac{3}{4}x + 6$

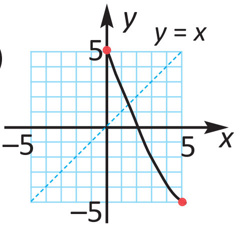
6. Verilən hər bir funksiyanın və onunla qarşılıqlı tərs funksiyanın qrafikini eyni koordinat müstəvisində qurun.

a) $f(x) = 4x$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = x^2, x \geq 0$

7. Funksiyanın qrafikinə görə, tərs funksiyanın qrafikini qurun. Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a)


b)


c)


8. Göstərin ki, verilən funksiyanın tərsi var.

1) Tərs funksiyanı tapın.

2) Tərs funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

3) Qrafikini qurun.

a) $y = x^3$ b) $y = x^4,\ x \geq 0$ c) $y = \dfrac{1}{x-1}$

9. Verilən funksiyaların qrafiklərini qurun. Hər bir funksiyanın qrafikinə görə onun tərs funksiyasının olub-olmadığını müəyyən edin.

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x + 3$ c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^3 + 3$ e) $y = |x| + 2$ f) $y = (x + 1)(x - 3)$

10. Verilən funksiyaların qarşılıqlı tərs funksiyalar olduğunu yoxlayın.

a) $f(x) = x + 7,\ g(x) = x - 7$

b) $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1,\ g(x) = 2x - 2$

d) $f(x) = -2x + 4,\ g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3,\ g(x) = \dfrac{2}{x+3}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-3},\ g(x) = \dfrac{1+3x}{x}$

11. Verilən funksiya ilə qarşılıqlı tərs funksiyanın düsturunu yazın.

a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4,\ \ x \geq 0$ b) $f(x) = 16x^4,\ x \leq 0$ c) $f(x) = -8x^3$

12. $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$ düsturu temperaturun Farenheyt ölçüsü ilə Selsi ölçüsü arasındakı asılılığı göstərir.

a) Temperaturun Farenheyt ölçüsünü Selsi ölçüsündən asılı ifadə edin.

b) Selsi ilə 15°, 20°, 0° temperaturun Farenheyt ölçüsünü tapın.

13. Hek balıq növüdür. Bu balıqların kütləsi (kq) ilə uzunluğu (sm) arasında asılılıq $m = (9{,}37 \times 10^{-6}) \cdot l^3$ kimidir.

a) Bu asılılığa görə tərs funksiyanı yazın.

b) Kütləsi 0,875 kq olan hek balığının uzunluğu təxminən neçə santimetr olar?

Analitik üsulla verilmiş funksiyanın təyin oblastı göstərilməyibsə, təyin oblastı olaraq arqumentin bütün elə qiymətləri nəzərdə tutulur ki, bu qiymətlərdə funksiyanı ifadə edən düsturun mənası olsun (arqumentin bu qiymətlərini bəzən funksiyanın təbii təyin oblastı adlandırırlar). Bu halda arqumentin hansı qiymətləri ala bilmədiyini araşdırmaq lazım gəlir.
Bəzi funksiyaların cəbri yazılışına görə onun təyin oblastını müəyyən edək.

1. Funksiya sərbəst dəyişənə görə **çoxhədli şəklində** verilibsə, onun təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Məsələn, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ funksiyasının təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$ çoxluğudur.

2. Rasional funksiyalarda məxrəcdəki ifadənin qiyməti sıfra bərabər ola bilməz. Məsələn, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ rasional funksiyasında arqumentin $x^2 - 4 = 0$ şərtini ödəyən qiymətləri onun təyin oblastına daxil ola bilməz. Bu qiymətlər $x = -2$ və $x = 2$-dir. $g(x)$ funksiyası $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ çoxluğunda təyin olunmuşdur.

3. Kvadrat kök daxil olan funksiyalarda kökaltı ifadə mənfi qiymət ala bilməz. Bu halı iki nümunə üzərində nəzərdən keçirək.
1) $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının təyin oblastı x-in $2x - 6 \geq 0$, yəni $x \geq 3$ şərtini ödəyən qiymətləridir. Deməli, funksiyanın təyin oblastı $[3; +\infty)$ aralığıdır. Kvadrat kökün mənası olması üçün $2x - 6 \geq 0$ olmalıdır. Onda $\sqrt{2x-6} \geq 0$, yəni $y \geq 0$ olur. Bu isə o deməkdir ki, $y = \sqrt{2x-6}$ funksiyasının qiymətlər çoxluğu $[0; +\infty)$ aralığıdır.

2) $y = \sqrt{4-x^2}$ funksiyasının təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapaq.
$4 - x^2 \geq 0$ olmalıdır. Bu bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[-2; 2]$ aralığıdır.
Deməli, verilmiş funksiya $[-2; 2]$ parçasında təyin olunmuşdur. Təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$ olur.
Buradan $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4}$. Yəni $0 \leq y \leq 2$.
Başqa sözlə, funksiyanın qiymətlər çoxluğu $[0; 2]$ parçasıdır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyaların $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ qiymətlərini (mümkün olduqda) tapın, tapmaq mümkün olmadıqda isə səbəbini izah edin.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

2. Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f(x) = x^3$ e) $f(x) = \sqrt{x}$

3. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $y = \dfrac{x-2}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x-3}{x^2-x-2}$ c) $y = \sqrt{3-x}$

d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

4. Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapın.

a) $f(x) = 2x-3$ b) $g(x) = -3(x+1)^2+6$ c) $h(x) = \sqrt{2-x}$

d) $\varphi(x) = \sqrt{x^2+9}$ e) $u(x) = \sqrt{9-x^2}$ f) $v(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

5. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-x^2}{x-1}}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{x-1}}$

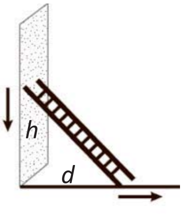
6. $y = \sqrt{x^2-mx+8}$ funksiyasının qrafiki M(2; 2) nöqtəsindən keçir. Funksiyanın ən kiçik qiymətini tapın və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

7. Uzunluğu 3 m olan nərdivan divara söykədilib. Nərdivanın aşağı ucu divardan d metr məsafədə, yuxarı ucu isə yerdən h metr hündürlükdədir.

a) h hündürlüyünün d məsafəsindən $h(d)$ asılılığının düsturunu yazın.

b) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin, qrafikini qurun.

c) $d = 0$ və $d = 3$ m olduqda nərdivanın vəziyyətini təsvir edin.



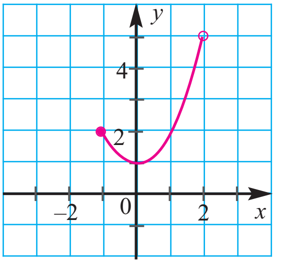
8. Qrafiki verilən funksiya üçün hansı doğrudur?

a) Təyin oblastı: (–1; 2)
   Qiymətlər çoxluğu: (2; 5)

b) Təyin oblastı: [–1; 2]
   Qiymətlər çoxluğu: (1;5)

c) Təyin oblastı: [–1; 2)
   Qiymətlər çoxluğu: [1; 5)

d) Təyin oblastı: [–1; 2]
   Qiymətlər çoxluğu: [1; 5]



9. **Açıq tipli sual.** Təyin oblastı verilmiş çoxluq olan hər hansı funksiya yazın:

a) bütün həqiqi ədədlər;

b) 2-dən fərqli bütün həqiqi ədədlər;

c) 4-dən kiçik olmayan bütün həqiqi ədədlər;

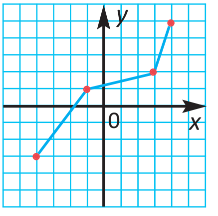
d) 3-dən böyük olmayan bütün həqiqi ədədlər.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ əsas funksiyasına görə $g(x) = -\sqrt{x}$, $k(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$ funksiyalarının çevrilmələrini müəyyən edin. Bu çevrilmələrdə funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu necə dəyişir?

2. a) $f(x) = x^2$ funksiyasının qrafikini üfüqi istiqamətdə neçə vahid paralel köçürsək, alınan qrafik (5; 16) nöqtəsindən keçər?
b) $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini y oxu boyunca neçə vahid sürüşdürsək, alınan qrafik (4 ; –1) nöqtəsindən keçər?

3. a) $f(x) = x^3 - 1$ funksiyasının $g(x)$ tərs funksiyasını yazın.

b) Funksiyanın qrafikinə görə onun tərs funksiyasının qrafikini çəkin.



4. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $f(x) = \sqrt{4x - 2}$
c) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x}}$
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 2x - 3}$

b) $f(x) = \sqrt{12 - 3x}$
d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$
f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

5. Funksiyaların sıfırlarını tapın.

a) $f(x) = 4x + 6$
c) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$
e) $f(x) = 3 - \sqrt{5 + x^2}$

b) $f(x) = x^2 - x - 6$
d) $f(x) = x^4 - 1$
f) $f(x) = \sqrt{x - 1} - 2$

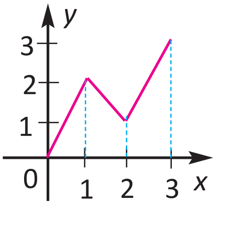
6. 1) Funksiyanın tək-cütlüyünü araşdırın.

a) $f(x) = (x - 2)^2 + (x + 2)^2$
b) $f(x) = (x - 4)^2 - (x + 4)^2$

2) $y = x^2 + (m - 1)\,x + 3$ funksiyasının tək-cütlüyünü araşdırın:
a) $m = 1$ olduqda;
b) $m = 0$ olduqda.

7. $f(x) = x \cdot f(x - 1) + 2$ olduğu məlumdur. $f(2)$-ni tapın.

8. Təyin oblastı [–3; 3] olan $f(x)$ funksiyasının qrafikinin bir hissəsi verilmişdir. Tapşırıqları qrafikə görə yerinə yetirin.
a) $f(x)$-in tək funksiya olduğunu bilərək, qrafiki tamamlayın. Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını göstərin. Funksiyanın ekstremumlarını yazın.
b) $f(x)$-in cüt funksiya olduğunu bilərək, qrafiki tamamlayın. Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını göstərin. Funksiyanın ekstremumlarını yazın.



9. Hissə-hissə verilmiş funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ -x+3, & x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

10. Arqumentin hansı qiymətində:

a) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ funksiyasının qiyməti 3-ə bərabərdir?

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-7}$ funksiyasının qiyməti $\dfrac{1}{2}$ -ə bərabərdir?

11. f: {(0; 1), (1; 3), (2; 5), (3; 7)} və $g(x) = 2x + 1$ verilmişdir.
Dəyişənin verilən qiymətində mürəkkəb funksiyaların qiymətini hesablayın.

a) $(g \circ f)(0)$ b) $(g \circ f)(1)$ c) $(g \circ f)(2)$ d) $(g \circ f)(3)$
e) $(f \circ g)(-0{,}5)$ f) $(f \circ g)(0)$ g) $(f \circ g)(1)$ h) $(f \circ g)(0{,}5)$

12. 1) Göstərin ki, verilən funksiyaların $(-\infty; +\infty)$ aralığında tərsi yoxdur.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ b) $f(x) = |x + 10|$

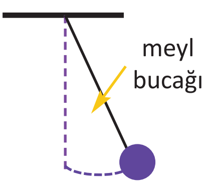
2) Verilən funksiyalar dönən funksiyalardır. Bu funksiyalara uyğun tərs funksiyaları yazın.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x-2}$

13. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ funksiyası verilmişdir.
a) bu funksiyanın təyin oblastını tapın;
b) $f(x-4) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

14. Riyazi rəqqasın bir tam dövr etməsinə sərf olunan zaman (rəqsin dövrü) rəqqasın qolunun uzunluğundan asılıdır. Rəqqasın qolu uzun olduqca bir dövrə sərf olunan zaman artır.
a) Verilən məlumata görə qrafik çəkin.
b) Qrafikə görə bu asılılığın hansı əsas funksiyanın çevrilməsinə uyğun olduğunu müəyyən edin.

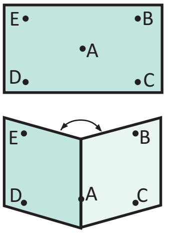
Rəqqasın qolunun uzunluğu(m)	Vaxt (san.)
2	2,8
4	4
6	4,9
8	5,7
10	6,3



c) Rəqqasın qolu 5 m; 12 m olduqda bir tam dövrə sərf olunan zamanı qrafikdən müəyyən edin.

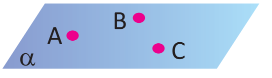
2 Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

Praktik məşğələ. Kağız vərəq üzərində A, B, C, D və E nöqtələrini şəkildəki kimi qeyd edin. Kağızı A nöqtəsindən keçən düz xətt boyunca şəkildə göstərildiyi kimi qatlayın. Sonra kağızı bir qədər açın. İkiyə qatlanmış vərəqin hər bir hissəsi bir müstəvi modelidir.



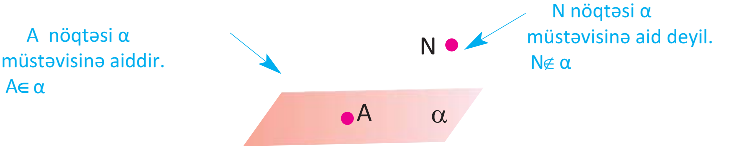
1. Hansı nöqtə bu müstəvilərin hər ikisinə aiddir?
2. Bu müstəvilərin hər biri üçün ona aid olan və aid olmayan nöqtələri göstərin.

Həndəsənin fəza fiqurlarını öyrənən bölməsi **stereometriya** adlanır.
Nöqtə, düz xətt, müstəvi həm də fəza fiqurları kimi qəbul edilir. Müstəvi sonsuzdur, şərti olaraq, adətən, paraleloqram şəklində təsvir edilir, bir kiçik hərflə və ya (bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtəni göstərən) üç hərflə işarə edilir.
Məsələn, α müstəvisi və ya ABC müstəvisi.



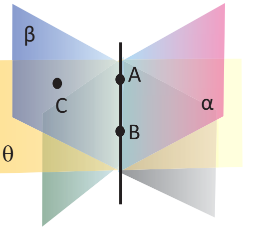
Fəzada aşağıdakı aksiomlar qəbul edilir.

Aksiom 1. İxtiyari müstəvi üçün bu müstəviyə aid olan nöqtələr və ona aid olmayan nöqtələr var.

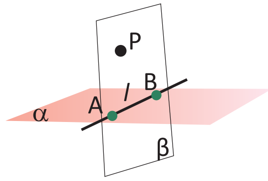


Aksiom 2. İki müxtəlif müstəvinin ortaq nöqtəsi varsa, onda onlar bu nöqtədən keçən düz xətt üzrə kəsişirlər.

Düz xətt iki nöqtəsi ilə təyin edilir, yəni iki nöqtədən bir və yalnız bir düz xətt keçirmək mümkündür (bəs, bir nöqtədən?).
Bəs, müstəvini neçə nöqtə təyin edir? İki nöqtə müstəvini müəyyən etmir. Şəkildən göründüyü kimi, A və B nöqtələrindən sonsuz sayda müstəvi keçirmək olar. Lakin onlar arasında elə müstəvi var ki, C nöqtəsi məhz onun üzərindədir.
Deməli, müstəvini bir düz xətt üzərində olmayan 3 nöqtə müəyyən edir.



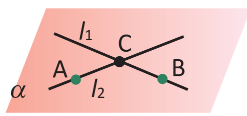
Aksiom 3. Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.



Bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrə **kollinear nöqtələr** deyilir. Göstərək ki, düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə, bu düz xəttin bütün nöqtələri həmin müstəvi üzərindədir. Doğrudan da, *l* düz xəttinin A və B nöqtələri α müstəvisi üzərində olsun. *l* düz xəttinə və α müstəvisinə aid olmayan *P* nöqtəsi götürüb, P, A və B nöqtələrindən β müstəvisi keçirək. α və β müstəvilərinin kəsişmə xətti A və B nöqtələrindən keçdiyinə görə *l* düz xətti ilə üst-üstə düşür. Kəsişmə xəttinin hər bir nöqtəsi α müstəvisinin nöqtəsi olduğundan *l* düz xəttinin də hər bir nöqtəsi α müstəvisinin üzərindədir.
Stereometriya aksiomlarından aşağıdakı nəticələr alınır.

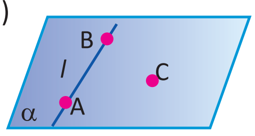
1. Düz xətt və bu düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

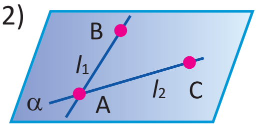
2. İki kəsişən düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

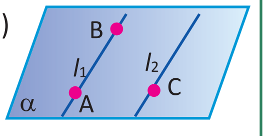


3. Müxtəlif iki paralel düz xətdən bir və yalnız bir müstəvi keçir.

Beləliklə, müstəvini: 1) düz xətt və onun üzərində olmayan bir nöqtə ilə; 2) iki kəsişən düz xətt ilə; 3) iki paralel düz xətt ilə təyin etmək olar.

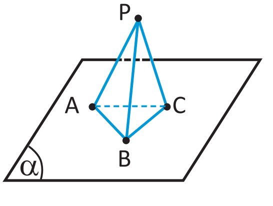
1)


2)


3)


Nümunə. Bir düz xətt üzərində olmayan A, B, C nöqtələri və onlarla eyni müstəvi üzərində olmayan P nöqtəsi verilmişdir. Hər biri bu nöqtələrin üçündən keçmək şərtilə bütün müstəviləri sadalayın.

Həlli: A, B, C nöqtələrindən α müstəvisi keçirək və bu müstəvi üzərində olmayan P nöqtəsini qeyd edək. Bu nöqtələrdən ABP, BPC, ABC və APC kimi 4 müstəvi keçirmək olar.

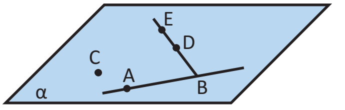


Eyni müstəvi üzərində yerləşən nöqtələrə **komplanar nöqtələr** deyilir. Məsələn, nümunədə verilmiş A, B, C, P nöqtələrinin ixtiyari üçü komplanardır.

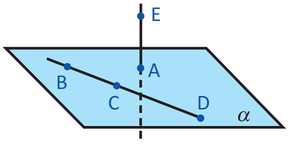
Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildəki α müstəvisini üç hərflə işarə etmək istəsəniz, hansı üçünü seçə bilməzsiniz?

a) ABE b) ACE c) BDE d) DAC



2. B, C, D nöqtələri bir düz xətt üzərindədir (kollinear), A, B, C, D nöqtələri bir müstəvi üzərindədir (komplanar), E nöqtəsi bu müstəvi üzərində deyil.

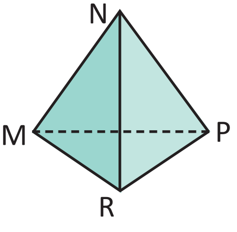


Verilmiş nöqtələrdən neçə müstəvi keçirmək olar?

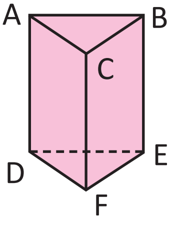
a) A, B və C b) B, C və D c) A, B, C, və D d) A, B, C və E

3. Fiqurun üzlərini özündə saxlayan müstəviləri yazın.

a)



b)



4. a) Fotoqraflar fotoaparatı üçayaqlı konsturksiya üzərinə bərkidirlər. Hansı aksioma görə üçayaqlının yerə yaxşı oturduğunu söyləmək olar?

b) Dördayaqlı stol bəzən yerə möhkəm oturmur. Səbəbini izah edin.

c) Xarrat iki ipin köməyilə dördayaqlı stolun dayanıqlı olub olmadığını necə yoxlaya bilər? İzah edin.

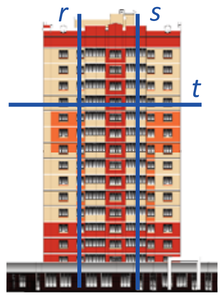
5. Verilən şərtlərə görə şəkil çəkin: AC düz xətti α müstəvisi üzərindədir, B, E, A və C nöqtələri isə komplanardır, Z nöqtəsi A və C nöqtələri ilə, X nöqtəsi isə B və E nöqtələri ilə kollineardır.

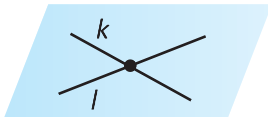
6. a) Cüt-cüt kəsişən üç düz xətdən neçə müstəvi keçirmək olar?

b) Dörd müxtəlif nöqtədən neçə müstəvi keçirmək olar? Bütün hallara baxın.

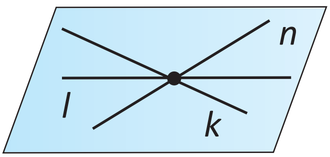
Fəzada düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyəti

Fəzada iki düz xətt paralel ola bilər (xüsusi halda üst-üstə düşə bilər). Paralel düz xətlər eyni müstəvidə yerləşib, kəsişmirlər. Fəzada iki düz xətt kəsişə bilər.

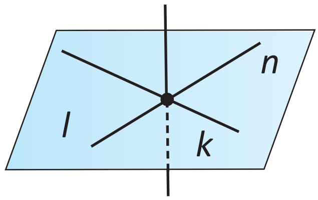




Fəzada iki düz xətt üçüncü düz xətlə bir nöqtədə kəsişirsə, bu düz xətlər eyni müstəvi üzərində ola da bilər, olmaya da bilər.

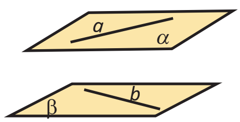


Düz xətlər eyni müstəvi üzərindədirlər. Belə düz xətlər komplanar düz xətlər adlanır.

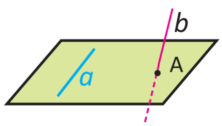


Düz xətlər müxtəlif müstəvilər üzərindədirlər. Bu düz xətlər komplanar deyillər.

Fəzada paralel olmayan iki düz xətt kəsişməyə də bilər. Paralel olmayan və kəsişməyən iki düz xəttə **çarpaz düz xətlər** deyilir.

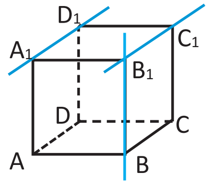


İki düz xətdən biri digərinin yerləşdiyi müstəvini bu düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsərsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.



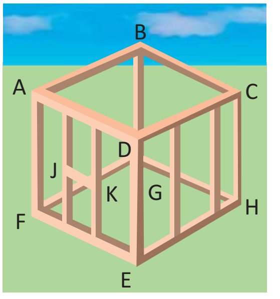
a və b düz xətlərinin çarpazlığı $a \dot{-} b$ kimi yazılır. İki çarpaz düz xəttin hər ikisindən bir müstəvi keçirmək mümkün deyil. İki çarpaz düz xətt arasındakı bucaq, uyğun olaraq, onlara paralel olan iki kəsişən düz xətt arasındakı bucağa deyilir.

Nümunə. Kubun modeli üzərində $A_1D_1 \dot{-} BB_1$.
$A_1D_1 \parallel B_1C_1$ olduğundan, A_1D_1 və BB_1 çarpaz düz xətləri arasındakı bucaq B_1C_1 və $B\,B_1$ düz xətləri arasındakı bucağa ($\angle BB_1C_1$) bərabərdir və bu halda 90^o-dir.



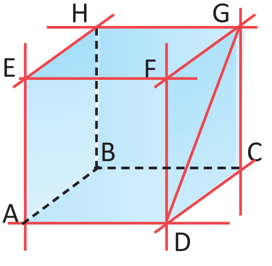
Öyrənmə tapşırıqları

7. Şəkildə göstərilən parçaları özündə saxlayan düz xətlərə görə tapşırıqları yerinə yetirin.
a) Paralel düz xətləri sadalayın.
b) Çarpaz düz xətləri göstərin.
c) İki kəsişən düz xətti kəsib onlarla eyni müstəvidə yerləşməyən düz xətti göstərin.

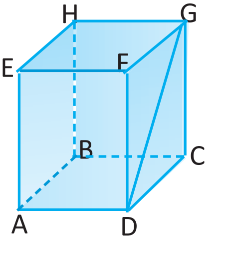


8. Kub üzərində kəsişən, paralel və çarpaz xətlərə aid tapşırıqları yerinə yetirin.

a) AB düz xəttinə paralel olan düz xətləri yazın.
b) BC düz xətti ilə kəsişən düz xətləri yazın.
c) EF düz xəttinə çarpaz olan düz xətləri yazın.
d) B nöqtəsi ilə komplanar olan üç nöqtə göstərin.
e) B nöqtəsi ilə komplanar olmayan üç nöqtə göstərin.
f) ABC müstəvisini kəsən düz xətləri göstərin.
g) CDF müstəvisi üzərində yerləşən düz xətləri göstərin.
h) AB və CG düz xətləri arasındakı bucağı tapın.
i) AB və DG düz xətləri arasındakı bucağı tapın.



9. Düzbucaqlı paralelepipeddə AB = AD = 3, AE = 4 olarsa, DG və BH düz xətləri arasındakı bucağın sinusunu tapın.



10. *a* və *b* düz xətləri bir müstəvi üzərindədir.
Bu düz xətlər hansı qarşılıqlı vəziyyətlərdə ola bilər?

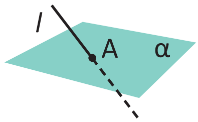
a) Kəsişə bilər b) Paralel ola bilər c) Çarpaz ola bilər

11. Elvin deyir ki, çarpaz düz xətlərə belə tərif də vermək olar: “Əgər iki düz xətt bir müstəvi üzərində deyilsə, onlar çarpaz düz xətlərdir.”
Bu fikir doğrudurmu? Fikrinizi əsaslandırın.

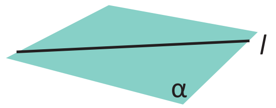
12. *a* və *b* çarpaz düz xətləri verilib. A və B nöqtələri *a* düz xəttinin, C və D nöqtələri isə *b* düz xəttinin üzərindədir. AC və BD düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini araşdırın.

Düz xətlə müstəvinin qarşılıqlı vəziyyətləri

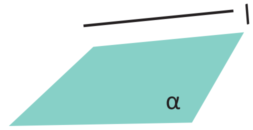
Düz xətlə müstəvinin yalnız bir ortaq nöqtəsi varsa, onda bu düz xətlə müstəvi kəsişirlər. $l \cap \alpha = A$



Düz xəttin iki nöqtəsi müstəvi üzərindədirsə, düz xətt bütünlüklə bu müstəvinin üzərindədir. $l \subset \alpha$



Müstəvi ilə ortaq nöqtəsi olmayan düz xətt bu müstəviyə paraleldir. $l \parallel \alpha$



Öyrənmə tapşırıqları

13. Hansı təkliflər doğrudur?

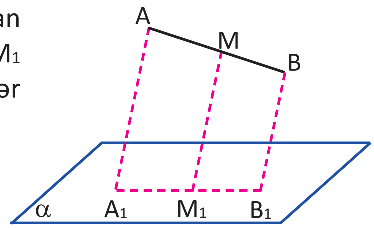
a) Düz xəttin iki nöqtəsi müstəviyə aiddirsə, onda düz xətt bu müstəvini kəsir.

b) Bir düz xətdən yalnız iki müstəvi keçirmək olar.

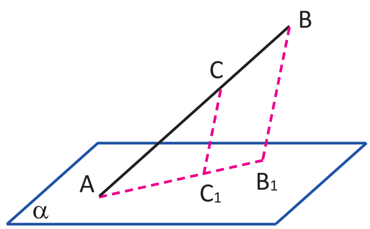
c) Düz xətt və onun üzərində olmayan nöqtədən yalnız bir müstəvi keçir.

d) İki düz xətdən biri digərinin yerləşdiyi müstəivini bu düz xəttə aid olmayan nöqtədə kəsirsə, onda bu düz xətlər çarpazdır.

14. Müstəvini kəsməyən AB parçasının uclarından və M orta nöqtəsindən α müstəvisini A_1, B_1, M_1 nöqtələrində kəsən paralel düz xətlər çəkilmişdir.
a) $AA_1 = 12$ sm, $BB_1 = 4$ sm;
b) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ olarsa,
MM_1 parçasının uzunluğunu tapın.



15. AB parçasının A ucu α müstəvisi üzərindədir. Parçanın B ucundan və C nöqtəsindən α müstəvisini, uyğun olaraq B_1 və C_1 nöqtələrində kəsən paralel düz xətlər çəkilmişdir.
$AC : CB = 3 : 2$, $BB_1 = 10$ sm olarsa,
CC_1 parçasının uzunluğunu tapın.

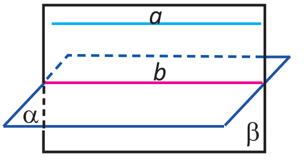


16. ABCD paraleloqramı və onu kəsməyən α müstəvisi verilmişdir. Paraleloqramın təpələrindən keçirilmiş paralel düz xətlər α müstəvisini A_1, B_1, C_1, D_1 nöqtələrində kəsir. $AA_1 = 3$ sm, $BB_1 = 4$ sm, $CC_1 = 7$ sm olarsa, DD_1 parçasının uzunluğunu tapın.

17. Müstəvini kəsməyən düz xətt parçasının ucları müstəvidən 15 sm və 25 sm məsafədədir. Parçanı 3 : 7 nisbətində bölən nöqtənin müstəvidən məsafəsini tapın (iki hala baxın).

Düz xəttin müstəviyə paralelliyi

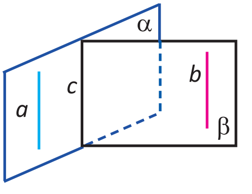
Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə paralellik əlaməti) Müstəvi üzərində olmayan düz xətt, bu müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, müstəvinin özünə də paraleldir.



İsbatı: α müstəvisi üzərində olmayan a düz xətti həmin müstəvi üzərindəki b düz xəttinə paralel olsun. a və b düz xətlərindən β müstəvisi keçirək. α və β müstəviləri b düz xətti boyunca kəsişəcəklər. a düz xətti α müstəvisini kəsərsə, kəsişmə nöqtəsi b düz xətti üzərində olmalıdır. Bu isə $a \parallel b$ olduğundan mümkün deyil. Deməli, $a \parallel \alpha$.

Nəticə. Bir müstəvi digər müstəviyə paralel olan düz xətdən keçib, onu kəsərsə, onda bu müstəvilərin kəsişmə xətti verilən düz xəttə paraleldir.

Nəticə. Kəsişən iki müstəvinin hər birinə paralel olan düz xətt bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə paraleldir.



Teorem 2. Paralel düz xətlərdən keçən iki müstəvi kəsişirsə, onda onların kəsişmə xətti bu düz xətlərə paraleldir.

İsbatı: Tutaq ki, $a \parallel b$. a düz xəttindən α müstəvisi, b düz xəttindən β müstəvisi keçirək. Bu müstəvilərin kəsişmə xətti c olsun. Düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə görə $a \parallel \beta$. Buradan $a \parallel c$. Eyni ilə $b \parallel \alpha$ olmasından, $b \parallel c$ alınır.

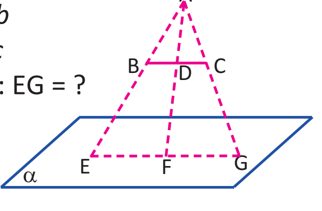
Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Verilən nöqtədən verilən müstəviyə paralel düz xətt keçirin. Neçə belə düz xətt keçirmək olar?
b) Verilən nöqtədən verilən düz xəttə paralel müstəvi keçirin. Neçə belə müstəvi keçirmək olar?

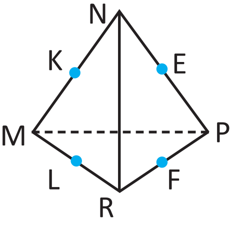
2. Paraleloqramın tərəflərindən biri α müstəvisi üzərindədir. Onun qalan tərəfləri α müstəvisi ilə hansı vəziyyətdədir?

3. ABC üçbucağının AB tərəfinə paralel olan müstəvi, bu üçbucağın AC tərəfini A_1 nöqtəsində, BC tərəfini B_1 nöqtəsində kəsir.
a) $AB = 18$ sm, $AA_1 : A_1C = 2 : 1$ b) $B_1C = 6$ sm, $AB : BC = 3 : 4$
c) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$ olarsa, A_1B_1 parçasının uzunluğunu tapın.

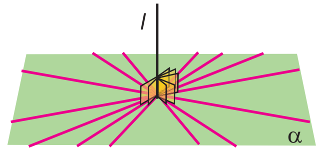
4. Verilir:
$BC \parallel \alpha$
$BC = a$
$AD = b$
$DF = c$
Tapın: $EG = ?$



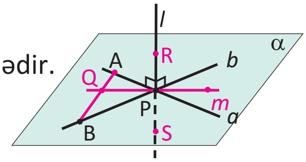
5. K,E,L,F uyğun olaraq MN,NP,MR,PR parçalarının orta nöqtələridir. KL və EF düz xətlərinin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən edin.



Tərif. Müstəvini (α) kəsən düz xətt (l) müstəvi üzərində olan və kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari düz xəttə perpendikulyardırsa, onda bu düz xətt müstəviyə perpendikulyardır və bu $l \perp \alpha$ kimi yazılır.



Teorem 1. (Düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlıq əlaməti) Düz xətt müstəvi üzərində kəsişən iki düz xəttə perpendikulyardısa, müstəviyə də perpendikulyardır.

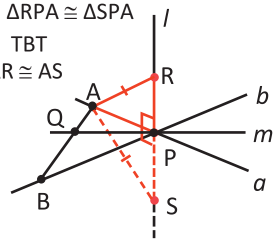


Verilir. a və b kəsişən düz xətləri α müstəvisi üzərindədir. $l \perp a$, $l \perp b$.

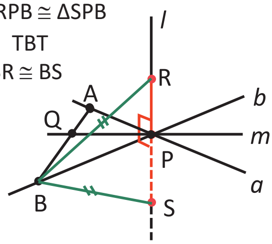
İsbat edin. $l \perp \alpha$

Tutaq ki, l düz xətti α müstəvisi üzərində P nöqtəsində kəsişən a və b düz xətlərinə perpendikulyardır. α müstəvisi üzərində P nöqtəsindən keçməklə ixtiyari m düz xətti və a, b, m düz xətlərini uyğun olaraq A, B, Q nöqtələrində kəsən düz xətti çəkək. P nöqtəsindən başlayaraq l düz xəttinin üzərində PR və PS konqruyent parçaları ayıraq. İsbatı aşağıdakı addımlarla yerinə yetirək.

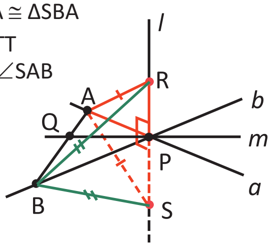
1) $\Delta RPA \cong \Delta SPA$
TBT
$AR \cong AS$



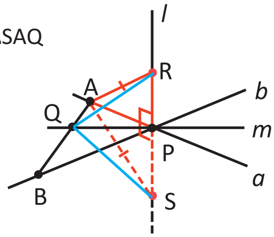
2) $\Delta RPB \cong \Delta SPB$
TBT
$BR \cong BS$



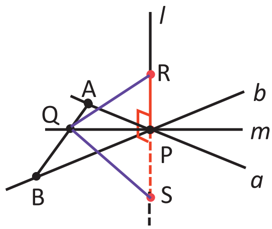
3) $\Delta RBA \cong \Delta SBA$
TTT
$\angle RAB \cong \angle SAB$



4) $\Delta RAQ \cong \Delta SAQ$
TBT
$RQ \cong SQ$



5) $\Delta RPQ \cong \Delta SPQ$
TTT
$\angle RPQ \cong \angle SPQ$



ΔRQS bərabəryanlı üçbucağında QP medianı həm də hündürlükdür. Buradan $m \perp l$. Tərifə görə alırıq ki, $l \perp \alpha$. Teorem isbat olundu.

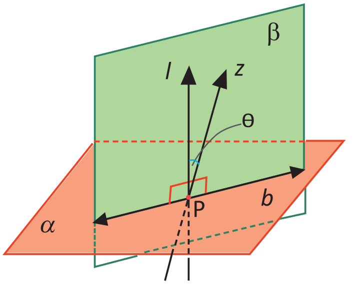
Teorem 2. Müstəvinin verilmiş nöqtəsindən bu müstəviyə bir və yalnız bir perpendikulyar düz xətt keçirmək olar.

Teorem 2-ni isbat edək.

Verilir. *l* düz xətti P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyardır.

İsbat edin. *l* düz xətti P nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyar olan yeganə düz xətdir.

İsbatı. Teoremi əksini fərz etməklə isbat edək. Fərz edək ki, α müstəvisinə P nöqtəsində perpendikulyar olan *l* düz xəttindən başqa bir *z* düz xətti də var. *l* və z düz xətləri α müstəvisini *b* düz xətti boyunca kəsən β müstəvisi üzərindədirlər. *l* və *z* düz xətlərinin arasındakı bucaq θ olsun. Düz xətt və müstəvinin perpendikulyarlığının tərifinə görə *l* düz xətti (eləcə də *z* düz xətti) α müstəvisi üzərində olan istənilən düz xəttə, o cümlədən *b* düz xəttinə də perpendikulyardır. Buradan alınır ki, *l* və *z* düz xətlərinin hər ikisi α müstəvisinə perpendikulyar olmalıdır. Lakin $\theta + 90° + 90° > 180°$ olduğundan bu mümkün deyil. Deməli, α müstəvisinə P nöqtəsində perpendikulyar yalnız və yalnız bir düz xətt var. Teorem isbat olundu.

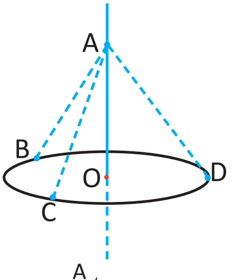


Öyrənmə tapşırıqları

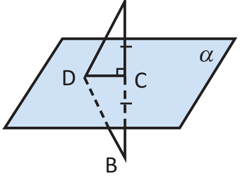
1. Yeni telefon dirəyi quraşdıran usta dirəyin yer səthində götürülmüş iki kəsişən xəttə perpendikulyar olduğuna əmin olmaqla dirəyin perpendikulyar basdırıldığını qeyd edir. Usta haqlıdırmı?

2. Üçbucağın təpəsindən keçən düz xətt bu təpədən çıxan tərəflərə perpendikulyardır. Bu düz xətlə üçbucağın üçüncü tərəfi arasındakı bucağı tapın.

3. Düz xətt dairə müstəvisinə perpendikulyar olub, onun mərkəzindən keçir. Bu düz xətt üzərində götürülmüş istənilən nöqtənin uyğun çevrənin bütün nöqtələrindən eyni məsafədə olduğunu göstərin.

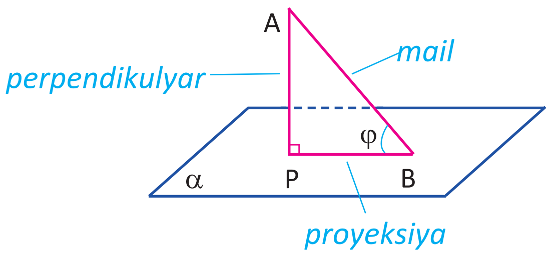


4. AB parçası α müstəvisinə perpendikulyar olub onu C nöqtəsində kəsir. $AC \cong CB$ olduqda isbat edin ki, α müstəvisi üzərindəki istənilən nöqtə A və B nöqtələrindən eyni məsafədədir.



Fəzanın A nöqtəsindən keçən və α müstəvisinə perpendikulyar olub onu P nöqtəsində kəsən düz xəttin AP parçasına A nöqtəsindən α müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyar deyilir. A nöqtəsi ilə α müstəvisinin P-dən fərqli digər nöqtələrini birləşdirən parçalara mail deyilir.

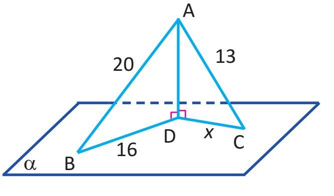
AP parçası – müstəviyə perpendikulyar,
AB parçası – mail,
P nöqtəsi – perpendikulyarın oturacağı,
B nöqtəsi – mailin oturacağı,
BP parçası – mailin müstəvi üzərində proyeksiyası adlanır.



Maillə onun müstəvi üzərindəki proyeksiyasının əmələ gətirdiyi bucağa maillə müstəvi arasındakı bucaq deyilir.
Maillə müstəvi arasındakı bucaq mailin müstəvi üzərindəki digər düz xətlərlə əmələ gətirdiyi bucaqların heç birindən böyük deyildir.

Müstəvi xaricindəki nöqtədən ona perpendikulyar və maillər çəkilərsə:
1) perpendikulyarın uzunluğu mailin uzunluğundan kiçikdir;
2) proyeksiyaları bərabər olan maillər bərabərdir;
3) proyeksiyası böyük olan mail böyükdür.

Nümunə. Fəzanın bir nöqtəsindən müstəviyə 20 sm və 13 sm uzunluqda iki mail çəkilib. Böyük mailin proyeksiyası 16 sm-dir. Kiçik mailin proyeksiyasını tapın.



Həlli: AD perpendikulyar, AB və AC maillər, BD və CD isə onların proyeksiyaları olsun.

Δ ABD-dən Pifaqor teoreminə görə:

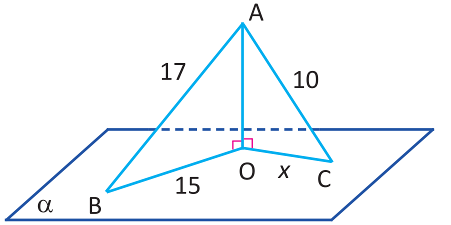
$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12$ (sm)

Δ ADC-dən Pifaqor teoreminə görə:

$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (sm)

Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.

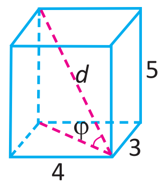


2. Fəzanın bir nöqtəsindən verilən müstəviyə 8 sm uzunluqda perpendikulyar və 16 sm uzunluqda mail çəkilmişdir. Tapın:
a) Mailin proyeksiyasını;
b) Perpendikulyarın mail üzərində proyeksiyasını.

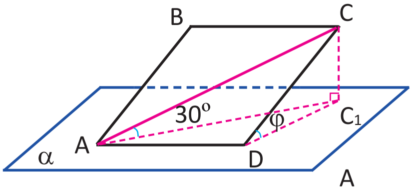
3. Uzunluğu 10 sm olan düz xətt parçası müstəvini kəsir. Parçanın ucları müstəvidən 5 sm və 3 sm məsafədədir. Parçanın müstəvi üzərindəki proyeksiyasını tapın.

4. Uzunluğu 8 sm olan parça müstəvini kəsir. Parçanın ucları müstəvidən 1 sm və 3 sm məsafədədir. Verilmiş parça ilə müstəvi arasındakı bucağı tapın.

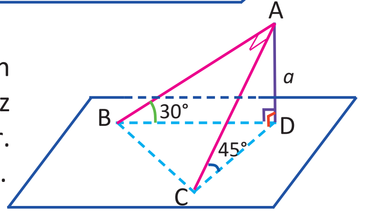
5. Düzbucaqlı paralelepipedin oturacağının tərəfləri 4 sm və 3 sm, paralelepipedin hündürlüyü 5 sm-dir. Paralelepipedin diaqonalını (d) və diaqonalla oturacaq müstəvisi arasındakı bucağı (φ) tapın.



6. ABCD kvadratının AD tərəfi müstəvi üzərindədir. AC diaqonalı müstəvi ilə 30°-li bucaq əmələ gətirir. DC tərəfinin müstəvi ilə əmələ gətirdiyi bucağı tapın.



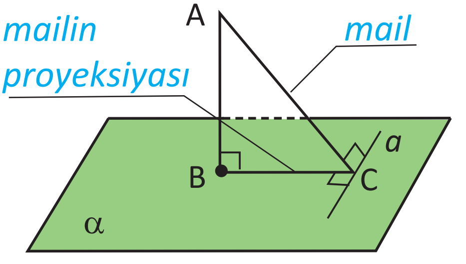
7. Müstəvidən a məsafədə olan A nöqtəsindən müstəvi ilə 45° və 30°-li bucaq, bir-biri ilə isə düz bucaq əmələ gətirən AB və AC mailləri çəkilmişdir. Maillərin oturacaqları arasındakı məsafəni tapın.



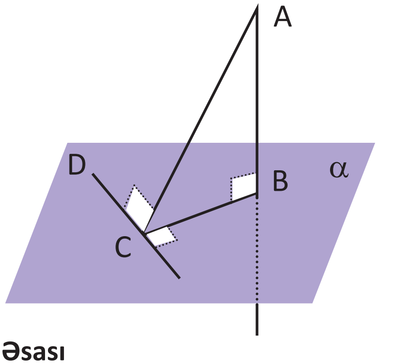
8. Bir nöqtədən verilən müstəviyə iki bərabər mail çəkilmişdir. Maillər arasındakı bucaq 60°, proyeksiyaları arasındakı bucaq isə düz bucaqdır. Hər mail ilə öz proyeksiyası arasındakı bucağı tapın.

9. Nöqtədən müstəviyə iki mail çəkilmişdir.
a) Maillərdən biri digərindən 8 sm böyük, proyeksiyaları isə 8 sm və 20 sm;
b) Maillərin uzunluqları nisbəti 2 : 3 kimi, proyeksiyaları isə 2 sm və 7 sm
olarsa, bu maillərin uzunluqlarını tapın.

Teorem. Müstəvi üzərində mailin oturacağından keçirilmiş düz xətt onun proyeksiyasına perpendikulyardırsa, mailin özünə də perpendikulyardır.



Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən *a* düz xətti BC-yə perpendikulyardırsa, AC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp BC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp AC$

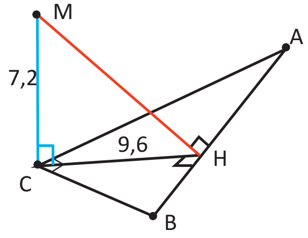


Teoremi isbat edək.
Verilir: $AB \perp \alpha$
AC α müstəvisinə çəkilmiş maildir,
BC parçası AC mailinin proyeksiyasıdır.
$CD \in \alpha$, $CD \perp BC$
İsbat etməli: $CD \perp AC$

Təklif	**Əsası**
$CD \perp BC$	Verilir
$AB \perp CD$	Düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlığı
$CD \perp$ ABC müstəvisi	AB və BC düz xətləri ABC müstəvisi üzərində kəsişən xətlərdir və $CD \perp AB$, $CD \perp BC$
$CD \perp AC$	$CD \perp$ ABC müstəvisi (düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığı)

Bu teoremin tərsi də doğrudur.
Tərs teorem. Müstəvi üzərindəki düz xətt müstəviyə çəkilmiş mailə perpendikulyardırsa, onun proyeksiyasına da perpendikulyardır.
Yəni, α müstəvisi üzərində C nöqtəsindən keçən *a* düz xətti AC-yə perpendikulyardırsa, BC-yə də perpendikulyardır.
Qısa yazılış: $a \perp AC$ və $BC \perp BA$ olarsa, $a \perp BC$

Tərs teoremi müstəqil isbat edin.



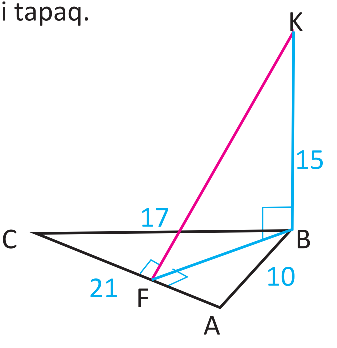
Nümunə 1. Düzbucaqlı ABC üçbucağının düz bucaq təpəsindən üçbucaq müstəvisinə çəkilən CM perpendikulyarının uzunluğu 7,2 vahid, üçbucağın düz bucaq təpəsindən hipotenuza çəkilmiş hündürlüyünün uzunluğu isə 9,6 vahiddir. M nöqtəsindən üçbucağın hipetonuzuna qədər məsafəni tapın.

Həlli: Üç perpendikulyar teoreminə görə $CH \perp AB$ isə, $MH \perp AB$ olur.
M nöqtəsindən hipetonuza qədər məsafə MH parçasının uzunluğuna bərabərdir.
ΔMCH-dan Pifaqor teoreminə görə alırıq:

$$MH = \sqrt{7{,}2^2 + 9{,}6^2} = 12 \text{ vahid.}$$

Nümunə 2. Tərəfləri 10; 17; 21 vahid olan üçbucağın böyük bucağının təpəsindən üçbucaq müstəvisinə uzunluğu 15 vahid olan perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın uc nöqtəsindən böyük tərəfə qədər məsafəni tapın.

Həlli: $BF \perp AC$ olarsa, $KF \perp AC$. Deməli, KF parçasının uzunluğunu tapmalıyıq.
Əvvəlcə Heron düsturuna görə ΔABC-nin sahəsini tapaq.



$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+17+21}{2} = 24$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{24\cdot(24-10)(24-17)(24-21)} =$$
$$= \sqrt{24\cdot14\cdot7\cdot3} = \sqrt{3\cdot8\cdot2\cdot7\cdot7\cdot3} = \sqrt{3^2\cdot7^2\cdot4^2} = 84$$

Digər tərəfdən $S = \frac{1}{2} AC \cdot BF$

Buradan $BF = \frac{2\cdot S}{AC} = \frac{2\cdot 84}{21} = 8$

KB parçası BF-ə perpendikulyar olduğundan ΔKBF düzbucaqlı üçbucaqdır.
$KF = \sqrt{KB^2 + BF^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$

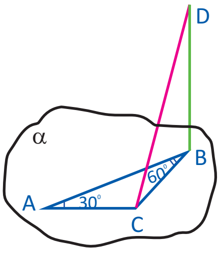
Öyrənmə tapşırıqları

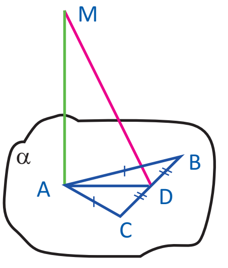
1. Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

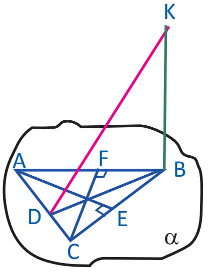
a) Verilir: $DB \perp (ABC)$
$\angle ABC = 60°$, $BAC = 30°$
İsbat edin: $DC \perp AC$

b) Verilir: $MA \perp (ABC)$
$AB = AC$, $CD = DB$
İsbat edin: $MD \perp BC$

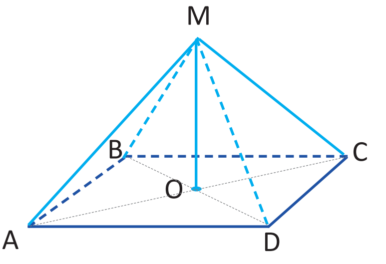
c) Verilir: $KB \perp (ABC)$
AE, CF, - Hündürlüklər
İsbat edin: $KD \perp AC$







2. Fəzanın M nöqtəsi tərəfləri 4 sm və 6 sm olan düzbucaqlının təpələrindən eyni məsafədədir. MA = MB = MC = MD = 7 sm olarsa, M nöqtəsindən düzbucaqlı müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

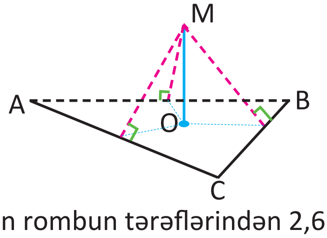


3. Fəzanın M nöqtəsi katetləri 6 sm və 8 sm olan düzbucaqlı ABC üçbucağının təpələrindən eyni məsafədədir. MA = MB = MC = 13 sm olarsa, M nöqtəsindən üçbucaq müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

4. Tərəfləri 10 sm, 10 sm, 12 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə 4 sm uzunluqda perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın ucundan üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

5. Fəzanın M nöqtəsi tərəfləri 3 sm olan düzgün üçbucağın müstəvisindən $\sqrt{3}$ sm, onun tərəflərindən isə bərabər məsafədədir. M nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

6. Fəzanın M nöqtəsi tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın tərəflərindən 5 sm məsafədədir. M nöqtəsindən üçbucaq müstəvisinə qədər məsafəni tapın.



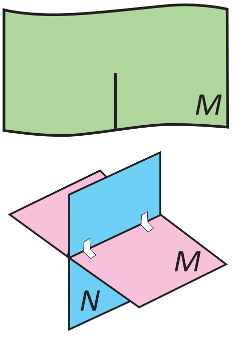
7. Fəzanın M nöqtəsi diaqonalları 6 sm, 8 sm olan rombun tərəflərindən 2,6 sm məsafədədir. M nöqtəsindən rombun müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyəti

Praktik məşğələ. Kağız qatlama

İki kağız vərəq götürün, birinin üzərində M, digərinin üzərində isə N hərfi yazın. Vərəqlərin hər ikisini yarıya qədər kəsin. Vərəqləri bir-birinə yapışqanlı lentlə bərkidin. Tapşırıqları yerinə yetirin.

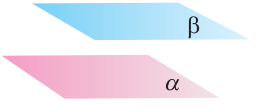
1. Hər iki müstəviyə aid olan D və E nöqtələri qeyd edin.
2. D və E nöqtələrindən keçən düz xətt çəkin.
3. Müstəvilərin kəsişməsi haqqında fikirlərinizi söyləyin.



Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri

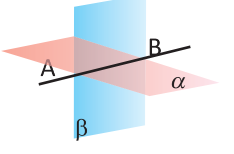
Paralel müstəvilər

Paralel müstəvilərin ortaq nöqtəsi yoxdur.



Kəsişən müstəvilər

İki müstəvi bir düz xətt üzrə kəsişir. α və β müstəviləri AB düz xətti üzrə kəsişir.



Üst-üstə düşən müstəvilər

İki müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan üç ortaq nöqtəsi varsa, müstəvilər üst-üstə düşür.

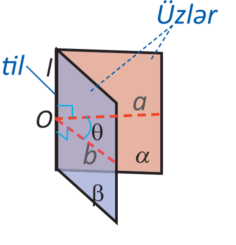
İkiüzlü bucaqlar

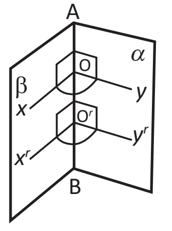
Ortaq sərhədləri olan iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura ***ikiüzlü bucaq*** deyilir. Yarımmüstəvilər ikiüzlü bucağın üzləri, onların ortaq sərhədi isə ikiüzlü bucağın tili adlanır. İki müstəvinin kəsişməsindən 4 ikiüzlü bucaq alınır.

İkiüzlü bucağın tili üzərində hər hansı bir O nöqtəsi götürüb, bu nöqtədən hər iki üzdə tilə perpendikulyar şüalar çəkək:

$$a \perp l \qquad b \perp l$$

a və b şüaları arasındakı bucaq (θ) ikiüzlü bucağın xətti bucağı adlanır.



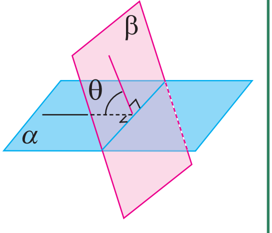


İkiüzlü bucaq özünün xətti bucağı ilə ölçülür.
İkiüzlü bucağın bütün xətti bucaqları paralel köçürmə ilə üst-üstə düşür, deməli, dərəcə ölçüləri bərabərdir (eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir).

Xətti bucağın qiyməti onun təpə nöqtəsinin vəziyyətindən asılı deyil.

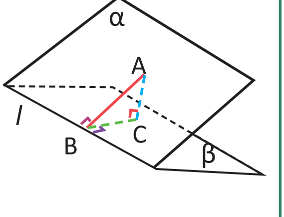
İkiüzlü bucaqların xətti bucağının dərəcə ölçüsü 0^o-dən 180^o-yə qədər olur.

İki müstəvinin kəsişməsi zamanı alınan ikiüzlü bucaqlar düz bucaq deyilsə, qiymətcə kiçik olanı iki müstəvi arasındakı bucaq qəbul edilir. Şəkildəki α və β müstəviləri arasındakı bucaq dedikdə tərəfləri bu müstəvilərin kəsişmə xəttinə perpendikulyar olan θ bucağı nəzərdə tutulur.



Nümunə 1. 30°-yə bərabər olan ikiüzlü bucağın bir üzü üzərində götürülmüş nöqtədən digər üzə qədər məsafə *a* olarsa, bu nöqtədən ikiüzlü bucağın tilinə qədər məsafəni tapın.

Həlli: $A \in \alpha$ verilmiş nöqtə olsun. $AB \perp l$, $AC \perp \beta$ endirək. Üç perpendikulyar teoreminə görə $BC \perp l$. Deməli, $\angle ABC$ xətti bucaqdır və $\angle ABC = 30°$. Şərtə görə $AC = a$ və 30°-li bucağın qarşısındakı katet hipotenuzun yarısına bərabər olduğu üçün ΔABC-dən $a = \frac{AB}{2}$. Buradan $AB = 2a$

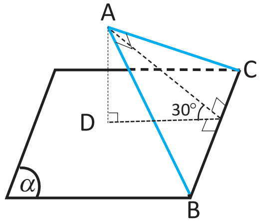


Öyrənmə tapşırıqları

1. Sinif otağında ikiüzlü bucağa aid nümunələr göstərin və xətti bucağının dərəcə ölçüsünün qiymətini təxmin edin.

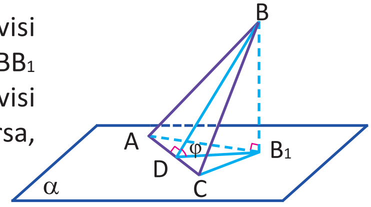
2. 45^o-yə bərabər olan ikiüzlü bucağın bir üzündə o biri üzündən *a* məsafədə bir nöqtə götürülmüşdür. Bu nöqtənin tildən məsafəsini tapın.

3. Düzbucaqlı üçbucağın katetləri 6 sm və 8 sm-dir. Üçbucağın müstəvisi ilə 30^o-li bucaq əmələ gətirərək, hipotenuzdan keçən müstəvinin düz bucaq təpəsindən məsafəsini tapın.



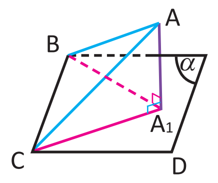
4. Tərəfləri AB = 18, BC = 12, AC = 18 olan ABC üçbucağı verilmişdir. AC tərəfindən üçbucağın müstəvisi ilə 45^o-li bucaq əmələ gətirən α müstəvisi keçir. B təpəsindən α müstəvisinə qədər məsafəni tapın.

5. ABC üçbucağının AC tərəfindən α müstəvisi keçirilmiş və B təpəsindən həmin müstəviyə BB_1 perpendikulyarı çəkilmişdir. Üçbucaq müstəvisi ilə α müstəvisi arasındakı ikiüzlü bucaq φ olarsa, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$ olduğunu göstərin.



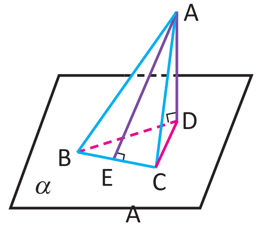
Göstəriş: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ və $B_1D = BD \cdot \cos\varphi$ münasibətlərindən istifadə edin.

6. ABC üçbucağının müstəvisi ilə onun BC tərəfindən keçən α müstəvisi arasındakı bucaq 30°-dir. BC = 12 sm, $AA_1 \perp \alpha$, AA_1 = 8 sm olarsa, A_1BC üçbucağının sahəsini tapın.

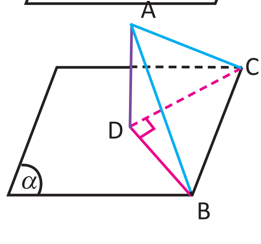


7. Tərəfi *a* olan bərabərtərəfli ABC üçbucağı verilmişdir. Bu üçbucağın AB tərəfindən onun müstəvisi ilə: a) 30°; b) 45°; c) 60°-li bucaq əmələ gətirən müstəvi keçirilmiş və C təpəsindən həmin müstəviyə CC_1 perpendikulyarı çəkilmişdir. ΔABC_1-in sahəsini tapın.

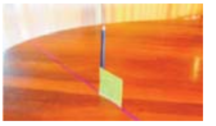
8. CAB üçbucağının BC tərəfindən α müstəvisi keçirilmiş və A təpəsindən bu müstəviyə AD perpendikulyarı çəkilmişdir. $S_{\Delta CAB}$ = 48 sm^2, $S_{\Delta CDB}$ = 24 sm^2 olarsa, ΔBCA müstəvisi ilə α müstəvisi arasındakı bucağı tapın.



9. ABC bərabərtərəfli üçbucağının tərəflərinin α müstəvisi üzərindəki proyeksiyaları BDC düzbucaqlı üçbucağını yaradır. AC = 8 sm-dirsə, DC-ni tapın.

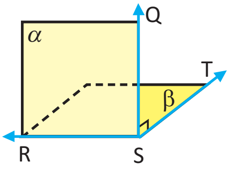


Perpendikulyar müstəvilər

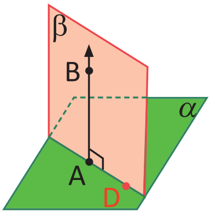



Praktik məşğələ. Kağız vərəqi karandaşa yapışqan lentlə bərkidin. Karandaş düz xəttin, kağız vərəq isə müstəvi modelidir. Karandaşı stol müstəvisi üzərində müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşdirməklə kağız vərəqlə stol müstəvisi arasındakı ikiüzlü bucaqların qiyməti haqqında fikirlərinizi söyləyin.

Tərif. İki müstəvinin kəsişməsi ilə alınan ikiüzlü bucaq düz bucaq olarsa, bu müstəvilərə perpendikulyar müstəvilər deyilir.

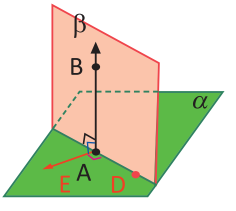


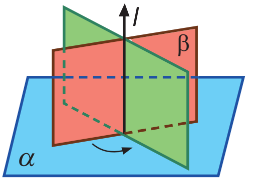
α müstəvisi üzərində $SQ \perp SR$ və β müstəvisi üzərində $TS \perp SR$. Üzləri α və β müstəviləri, tili isə RS olan ikiüzlü bucağın ölçüsü $\angle QST$ - xətti bucağın ölçüsü ilə eynidir. $\angle QST$ düz bucaqdırsa, $\alpha \perp \beta$.



Teorem. (müstəvilərin perpendikulyarlıq əlaməti) Müstəvi digər müstəviyə perpendikulyar olan düz xətdən keçirsə, onda bu müstəvilər perpendikulyardır.

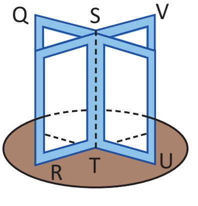
Verilir: AB düz xətti α müstəvisinə A nöqtəsində pependikulyardır və β müstəvisi AB düz xəttindən keçir.
İsbat edin: β müstəvisi α müstəvisinə perpendikulyardır.
İsbatı: α və β müstəvilərinin kəsişməsini AD ilə işarə edək. AD bu müstəvilərin yaratdığı ikiüzlü bucağın tilidir.
α müstəvisi üzərində olmaqla AD-yə perpendikulyar olan AE xəttini çəkək. $AB \perp \alpha$ olduğundan AB xətti A nöqtəsindən keçən istənilən xəttə perpendikulyardır. Yəni, $AB \perp AD$, $AB \perp AE$. $\angle BAE$ ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır, $AB \perp AE$ olduğundan ikiüzlü bucaq düz bucaqdır. Deməli, $\beta \perp \alpha$. Teorem isbat edildi.





Düz xətdən keçən istənilən müstəvini β müstəvisinin l düz xətti ətrafında fırlanmasından alınan müstəvilər kimi modelləşdirmək olar.

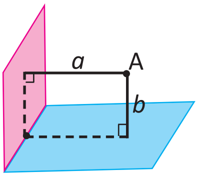
Tətbiqi nümunə. Otellərin, ticarət mərkəzlərinin girişindəki fırlanan qapılar perpendikulyar müstəvilərə nümunə ola bilər. Qapının sxematik təsvirindən görünür ki, ST düz xətti döşəməyə perpendikulyardır və qapı bu düz xətt ətrafında fırlandıqca STU, STR müstəviləri də RTU döşəmə müstəvisinə perpendikulyar olaraq qalırlar.



Öyrənmə tapşırıqları

10. Evdə və məktəbdə ətrafınızda gördüklərinizə görə perpendikulyar müstəvilərə aid nümunələr göstərin və onların perpendikulyar olduqlarını əsaslandırın.

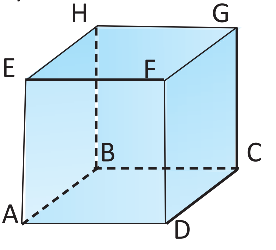
11. Nöqtə, perpendikulyar iki müstəvidən *a* və *b* məsafədədir. Bu nöqtədən müstəvilərin kəsişmə xəttinə qədər məsafəni tapın.



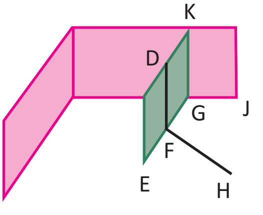
12. a) Kubun ADC müstəvisinə perpendikulyar olan tillərini yazın.

b) AE tili hansı müstəvilərə perpendikulyardır? Cavabınızı düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlığı haqqında teoremi yazmaqla izah edin.

c) Üç cüt perpendikulyar müstəvinin adını yazın. Onların perpendikulyarlığını öyrəndiyiniz teoremləri yazmaqla izah edin.



13. Təsəvvür edin ki, siz sinif otağınızı arakəsmə lövhələri ilə şəkildə göstərildiyi kimi iki hissəyə ayırmalısınız. Sizə kömək edən usta arakəsmə üzərində təbaşirlə DF, döşəmədə isə FH düz xəttini çəkdi.



a) Bu iki xəttin və günyənin köməyilə arakəsmənin modeli olan EFD müstəvisinin döşəməni göstərən EFH müstəvisinə perpendikulyar olduğunu necə müəyyən edərdiniz?

b) Arakəsmənin divara (KGJ) perpendikulyar olduğuna hansı yoxlamalarla əmin olmaq olar?

14. Hansı fikir doğru, hansı yanlışdır?

a) Düz xətt üzərində götürülmüş hər hansı nöqtədən bu düz xəttə yalnız bir perpendikulyar çəkmək olar.

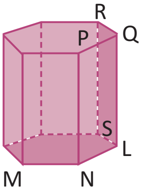
b) İki kəsişən müstəvinin hər biri üçüncü müstəviyə perpendikulyar olarsa, bu müstəvilər bir-birinə də perpendikulyardır.

c) AB düz xətti A nöqtəsində α müstəvisinə perpendikulyardırsa və AB düz xətti β müstəvisi üzərində yerləşirsə, $\alpha \perp \beta$.

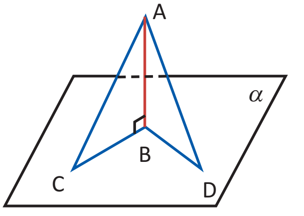
d) Düz xətt üzərində verilən nöqtədən bu düz xəttə yalnız bir perpendikulyar müstəvi keçirmək olar.

e) Müstəvi iki kəsişən düz xətdən birinə perpendikulyar olarsa, digərinə də perpendikulyardır.

15. a) PN-nin MNL müstəvisinə perpendikulyar olması hansı müstəvinin də MNL müstəvisinə peprpendikulyar olduğunu göstərir?
b) Həm RSL, həm də PNL müstəvisinin MNL müstəvisinə perpendikulyar olması üçün hansı düz xətt MNL müstəvisinə perpendikulyar olmalıdır?



16. AB parçası α müstəvisinə B nöqtəsində perpendikulyardır.
α müstəvisi üzərindəki BC və BD parçaları konqruyentdir: BC $\cong$ BD.
AC $\cong$ AD olduğunu ikisütunlu cədvəli tamamlamaqla isbat edin. İsbatı dəftərinizdə yazın.



Verilir: AB $\perp \alpha$, BC $\cong$ BD, C və D $\in \alpha$
İsbat edin: AC $\cong$ AD

Təklif	Əsası
1. AB $\perp \alpha$, BC $\cong$ BD, C və D $\in \alpha$	1. Verilir
2. AB $\perp$ BC, AB $\perp$ BD	2. ....
3. $\angle$ABC və $\angle$ABD düz bucaqlardır	3. Perpendikulyarın tərifinə görə
4. $\angle$ABC $\cong$ $\angle$ABD	4. Hər ikisi düz bucaqdır
5. ΔABC $\cong$ ΔABD	5. ....
6. AC $\cong$ AD	6. ....

17. Bərabərtərəfli ABC üçbucağı α müstəvisi üzərindədir. AD parçası α müstəvisinə perpendikulyardır. BD $\cong$ CD olduğunu isbat edin.

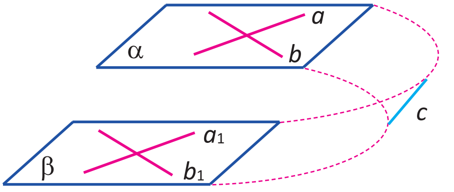
18. AB oturacağı ortaq olan ABC və ABD bərabəryanlı üçbucaqlarının müstəviləri perpendikulyardır. AB = 16 sm, AC = BC = 17 sm, AD $\perp$ BD olarsa, CD məsafəsini tapın.

19. a) NML müstəvisini və bu müstəviyə perpendikulyar olan AM düz xəttini çəkin.
b) AM düz xəttindən keçən və NML müstəvisinə perpendikulyar olan üç müstəvi çəkin.

20. Perpendikulyar iki müstəvi üzərində olan A və B nöqtələrindən müstəvilərin kəsişmə xəttinə AC və BD perpendikulyarları çəkilmişdir.
a) AC = 8 sm, BD = 9 sm, CD = 12 sm; b) AD = 6 m, BC = 7 m, CD = 2 m;
c) AC = a, BD = b, CD = c olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.

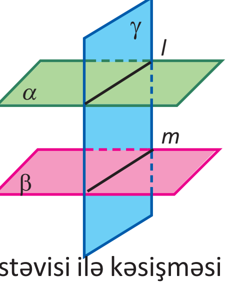
Paralel müstəvilər

Teorem 1. **(Müstəvilərin paralellik əlaməti)** Bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti uyğun olaraq, o biri müstəvinin iki kəsişən düz xəttinə paralel olarsa, bu müstəvilər bir-birinə paraleldir.



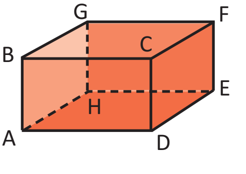
İsbatı: Tutaq ki, kəsişən a və b düz xətləri α müstəvisi, a_1 və b_1 düz xətləri isə β müstəvisi üzərindədir və $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Göstərək ki, $\alpha \parallel \beta$.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, α və β müstəviləri c düz xətti boyunca kəsişirlər. Düz xətlə müstəvinin paralellik əlamətinə görə $a \parallel c$ və $b \parallel c$. Belə çıxır ki, c düz xətti kəsişən a və b düz xətlərinin hər birinə paraleldir. Bu isə mümkün deyil. Deməli, fərziyyəmiz düz deyil, yəni $\alpha \parallel \beta$. Teorem isbat edildi.

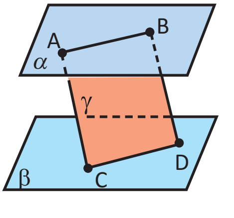


Teorem 2. İki paralel müstəvi üçüncü müstəvi ilə kəsişirsə, onda kəsişmə xətləri paraleldir.
Qısa yazılış: $\alpha \parallel \beta$ olarsa, γ müstəvisi α və β müstəvisini kəsirsə, $l \parallel m$

Teoremin isbatı:
Verilir: $\alpha \parallel \beta$, γ müstəvisinin α müstəvisi ilə kəsişməsi l, β müstəvisi ilə kəsişməsi m düz xətti olsun.
İsbat edin: $m \parallel l$
İsbatı: m və l düz xətləri γ müstəvisi üzərində olduqlarından çarpaz ola bilməzlər. Onlar kəsişə də bilməzlər, əks halda α və β müstəvilərinin ortaq nöqtəsi olardı. Doğrudan da, l və m düz xətləri hər hansı nöqtədə kəsişərlərsə, bu nöqtə l düz xətti üzərində, yəni α müstəvisi üzərində olmalıdır, həm də m düz xətti üzərində, yəni β müstəvisi üzərində olmalıdır. Lakin α və β müstəviləri paraleldir, heç bir ortaq nöqtələri yoxdur. Deməli, $m \parallel l$. Teorem isbat edildi.

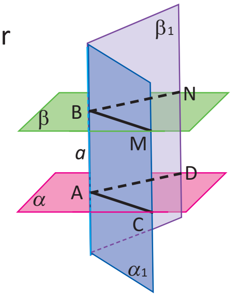


Tətbiqi nümunə. Düzbucaqlı paralelepipeddə ABG və DCF müstəviləri paraleldir. Hansı müstəvilər bu müstəviləri kəsərək paralel tilləri yaradır?
Həlli: 1. ABC müstəvisi ABG və DCF paralel müstəvilərini kəsərək AB və CD paralel tillərini yaradır: $AB \parallel CD$
2. HGF müstəvisi ABG və DCF paralel müstəvilərini kəsərək GH və FE paralel tillərini yaradır: $GH \parallel FE$



Teorem 3. Paralel düz xətlərin paralel müstəvilər arasında qalan parçaları bərabərdir.
Verilir: $\alpha \parallel \beta$, $AC \parallel BD$,
İsbat edin: $AC \cong BD$
Teoremi müstəqil isbat edin.

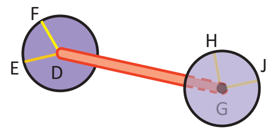
Teorem 4. İki paralel müstəvidən birinə perpendikulyar olan düz xətt o birinə də perpendikulyardır.



İsbatı. $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \alpha$ olsun. a düz xəttindən keçən α_1 və β_1 müstəviləri verilmiş α və β müstəvilərini paralel düz xətlər boyunca kəsirlər: $AC \parallel BM$, $AD \parallel BN$.
$a \perp AC$, $a \perp AD$ olduğundan, $a \perp BM$ və $a \perp BN$. Düz xətlə müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə $a \perp \beta$ olur.
Teorem isbat olundu.

Teorem 5. Eyni düz xəttə perpendikulyar olan iki müstəvi paraleldir.

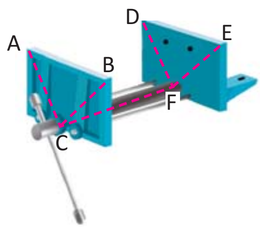
Tətbiqi nümunə. Kərim kartondan avtomobil modeli düzəldir. Təkərləri birləşdirən DG oxu təkərlərə perpendikulyar olmalıdır. Ox hansı xətlərə perpendikulyar olmalıdır ki, o, təkərlərin paralel olduğuna əmin olsun.



Həlli: DG oxu EFD müstəvisi üzərində olan ED və FD kəsişən xətlərinə və HGJ müstəvisi üzərində HG və GJ kəsişən xətlərinə perpendikulyar olarsa, Kərim təkərlərin paralel olduğuna əmin ola bilər.

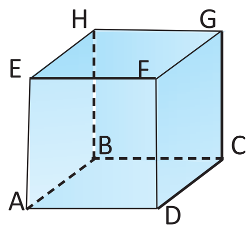
Öyrənmə tapşırıqları.

1. Dülgərlər, çilingərlər detalları iki paralel lövhə (məngənə) arasında sıxıb, bərkidir və onların üzərində lazımi işləri yerinə yetirirlər.
Şəkildə göstərilən və məngənəni xatırladan iki lövhənin bir-birinə paralel olması üçün hansı xətlər perpendikulyar olmalıdır?

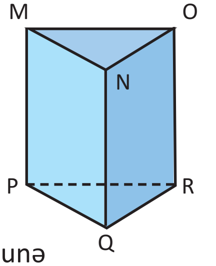


2. AB düz xətti α müstəvisinə paralel, β müstəvisinə perpendikulyardır.
CD düz xətti β müstəvisi üzərindədir.
1) Şərtə uyğun şəkil çəkin.
2) Hansı doğrudur?
a) $\alpha \parallel \beta$ b) $\alpha \perp \beta$ c) $AB \parallel CD$ d) $CD \perp \alpha$

3. Şəkildə verilən kubun A, F və C təpə nöqtələrindən keçən müstəvi ilə E, B və G təpə nöqtələrindən keçən müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətini müəyyən edin. Fikrinizi əsaslandırın.

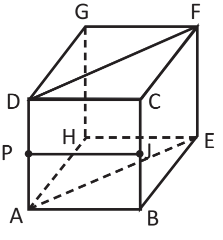


4. MNO və PQR müstəviləri paralel müstəvilər və MP || NQ || QR olduğuna görə NO = QR olduğunu söyləmək olarmı? Cavabınızı izah edin.



5. Verilən təklifin doğru və ya yanlış olduğunu şəkildən nümunə gətirməklə izah edin.

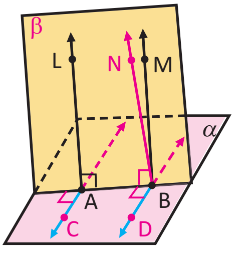
a) İki müstəvi perpendikulyardırsa, bu müstəvilərdən birinə paralel olan düz xətt digərinə də perpendikulyardır.
b) İki müstəvi eyni düz xəttə paraleldirsə, bu müstəvilər bir-birinə paraleldir.
c) Eyni düz xəttə perpendikulyar olan düz xətlər paraleldir.
d) Eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki müstəvi bir-birinə paraleldir.



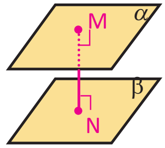
e) İki paralel düz xətdən birinə çarpaz olan düz xətt digərinə də çarpazdır.

6. ABC bərabəryanlı üçbucağının BC oturacağı α müstəvisi üzərindədir. α müstəvisinə paralel olan β müstəvisi AB tərəfini D nöqtəsində və AC tərəfini E nöqtəsində kəsir. İsbat edin ki, ADE üçbucağı da bərabəryanlı üçbucaqdır.

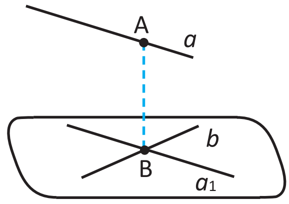
7. **Teorem.** Eyni müstəviyə perpendikulyar olan iki düz xətt paraleldir.
Verilir: α müstəvisi, $LA \perp \alpha$, $MB \perp \alpha$
İsbat edin: LA || MB
Teoremin isbatı üçün LA-ya paralel olan BN düz xəttini çəkin və bu paralel düz xətlərdən β müstəvisi keçirin.
BN və BM xətlərinin üst-üstə düşdüyünü göstərin.
Teoremi aşağıdakı addımlarla isbat edin.



1. α müstəvisi üzərində AC⊥AB çəkin və ∠LAC-nin α və β müstəvilərinin əmələ gətirdiyi düz ikiüzlü bucağın xətti bucağı olduğunu göstərin.
2. İki paralel düz xətdən biri üçüncü düz xəttə perpendikulyardırsa, digəri də bu xəttə perpendikulardır. LA⊥AB şərtinə görə, $NB \perp AB$ olduğunu göstərin.
3. α müstəvisi üzərində $BD \perp AB$ çəkin. α və β müstəvilərinin düz ikiüzlü bucağından istifadə etməklə $BD \perp NB$ olduğunu göstərin.
4. MB-nin α müstəvisinə B nöqtəsində çəkilmiş yeganə perpendikulyar olduğunu göstərin.



İki paralel müstəvi arasındakı məsafə. İki paralel müstəvi arasındakı məsafə bu müstəvilərdən birinin ixtiyari nöqtəsindən o birinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir.



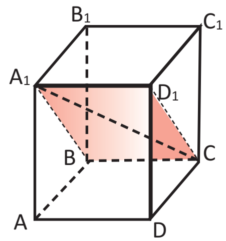
İki çarpaz düz xətt arasındakı məsafə. İki çarpaz düz xəttin hər birindən o birinə paralel müstəvi keçirmək olar. Məsələn, *b* düz xəttindən *a* düz xəttinə paralel müstəvi keçirək. Bunun üçün *b* düz xəttini kəsən və *a*-ya paralel olan a_1 düz xətti çəkək. a_1 və *b* kəsişən düz xətlərindən müstəvi keçirsək, bu müstəvi *a* düz xəttinə paraleldir. *a* düz xəttinin ixtiyari nöqtəsindən bu müstəviyə qədər məsafə *a* və *b* çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəyə bərabərdir.

$b \cap a_1 = B$ olarsa, α müstəvisinə perpendikulyar olan AB parçası *a* və *b* çarpaz düz xətlərinin ortaq perpendikulyarı olur.

8. İki paralel müstəvi arasındakı məsafə 8 sm-dir. Uzunluğu 10 sm olan düz xətt parçasının ucları bu müstəvilərə söykənir. Parçanın hər iki müstəvi üzərindəki proyeksiyasını tapın.

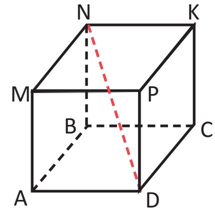
9. İki paralel α və β müstəvisi arasında AC və BD parçaları çəkilmişdir ($A,B \in \alpha$; $C,D \in \beta$). AC = 17 sm, BD = 10 sm, AC və BD-nin müstəvilərdən biri üzərində proyeksiyalarının cəmi 21 sm-dir. Bu proyeksiyaların uzunluqlarını və müstəvilər arasındakı məsafəni tapın.

10. **Verilir:** düzbucaqlı paralelepiped,
$AB = AD = 15$ sm, $AA_1 = 20$ sm.
A_1C və AD çarpaz düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.
Göstəriş: A_1C diaqonalından AD-yə paralel müstəvi keçirin.



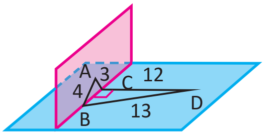
11. İki paralel müstəvi arasında 4 m uzunluqda perpendikulyar və 6 m uzunluqda mail çəkilmişdir. Hər müstəvinin üzərində bunların ucları arasında məsafə 3 m-dir. Perpendikulyarla mailin orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

12. Tili *a* olan kubun DN diaqonalı ilə BC tili arasındakı məsafəni tapın.



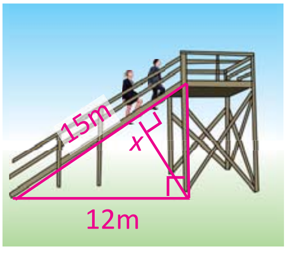
1. Şəkilə görə yerinə yetirin.

a) ABC üçbucağının düzbucaqlı üçbucaq olduğunu göstərin.

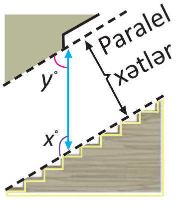


b) Şəkildə verilən ölçüləri elə dəyişin ki, BCD üçbucağı yenə düzbucaqlı üçbucaq olsun, ABC üçbucağı isə düzbucaqlı üçbucaq olmasın.

2. Şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.



3. Pilləkanın əl tutalğacı tavana paraleldir. $\angle x = 122°$ olarsa, y bucağını tapın.



4. Düz xətt parçasının ucları müstəvidən a və b məsafədədir ($a > b$). Parçanın orta nöqtəsinin müstəvidən məsafəsini tapın:
a) Parça müstəvini kəsmirsə; b) Parça müstəvini kəsirsə.

5. Tərəflərinin uzunluğu 6 sm olan bərabərtərəfli üçbucağın mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə 3 sm uzunluqda perpendikulyar qaldırılmışdır. Perpendikulyarın ucundan üçbucağın tərəflərinə qədər məsafəni tapın.

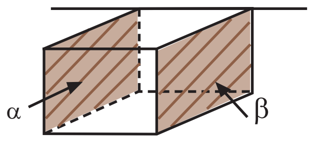
6. A və B nöqtələri ilə müstəvi arasındakı məsafə uyğun olaraq a və b-yə , bu nöqtələrdən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarların oturacaqları arasındakı məsafə c-yə bərabərdir.
a) A və B nöqtələrinin müstəvinin eyni və müxtəlif tərəflərində ola biləcəklərini nəzərə alaraq AB məsafəsini tapın.
b) $a = 7$ sm, $b = 2$ sm, $c = 12$ sm olduqda AB məsafəsini hesablayın.

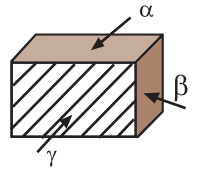
7. AB, AC və AD parçaları cüt-cüt perpendikulyardır. AB = 5, BD = 13, CD = 20 olarsa, AC-ni tapın.

8. Aşağıdakı fikirlərdən hansının doğru, hansının səhv olduğunu verilən şəkillərə görə müəyyən edin. Şəkilləri dəftərinizdə çəkin və cavabınızı yazın.

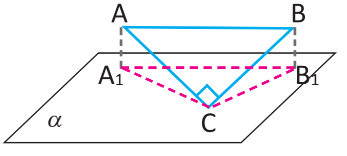
1. İki müstəvi eyni düz xəttə perpendikulyardırsa, bu müstəvilər paraleldir.

2. İki müstəvinin hər biri üçüncü müstəviyə perpendikulyardırsa, bu müstəvilər paraleldir.

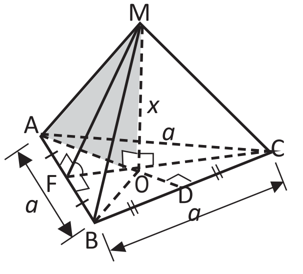




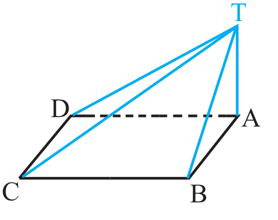
9. Düzbucaqlı ABC üçbucağının düz bucaq təpəsindən hipetonuza paralel və ondan 1 sm məsafədə müstəvi keçirilmişdir. Katetlərdən birinin bu müstəvi üzərindəki proyeksiyası 5 sm, hipetonuzun proyeksiyası 6 sm olarsa, digər katetin proyeksiyasını tapın.



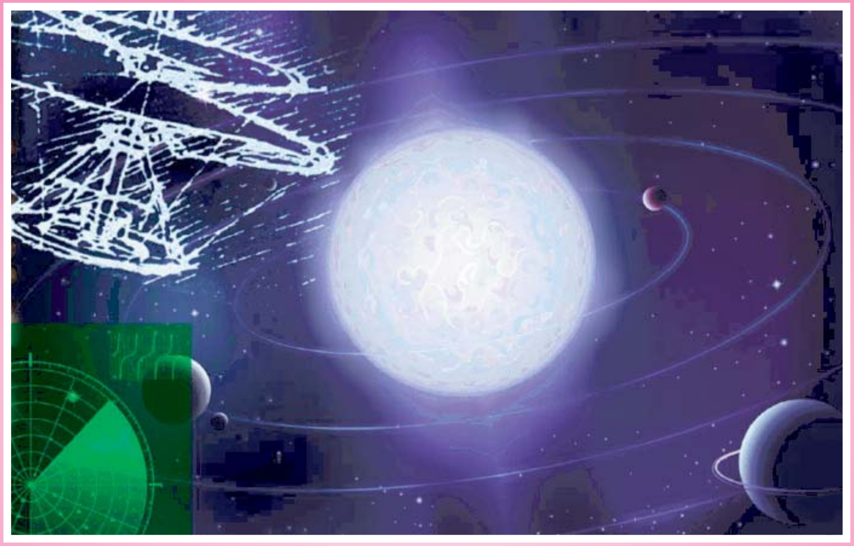
10. Tərəfinin uzunluğu a olan bərabərtərəfli üçbucağın O mərkəzindən üçbucaq müstəvisinə qaldırılmış perpendikulyar üzərində ayrılmış OM parçasının uzunluğu x-lə işarə edilmişdir.
a) $MA \perp BC$ olduğunu göstərin.
b) x -in hansı qiymətində ABM və ABC müstəviləri arasındakı ikiüzlü bucaq 60° olar?
c) x -in hansı qiymətində MA, MB, MC parçaları cüt-cüt perpendikulyar olar?



11. ABCD düzbucaqlısının A təpəsindən düzbucaqlının müstəvisinə AT perpendikulyarı qaldırılmışdır.
TB = 6 sm, TD = 7 sm, TC = 9 sm olarsa:
a) AT-nin uzunluğunu tapın;
b) A nöqtəsindən TBC müstəvisinə qədər məsafəni tapın;
c) $\angle$TBA-nın dərəcə ölçüsünü tapın.

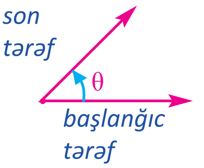


3 Triqonometrik ifadələr və onların çevrilmələri



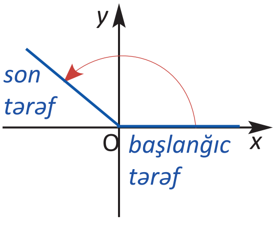
Dönmə bucağı

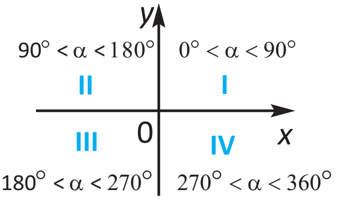
Bucağa şüanın öz başlanğıc nöqtəsi ətrafında dönməsindən alınan fiqur kimi də baxmaq olar. Şüanın ilk vəziyyətinə bucağın başlanğıc tərəfi və bu şüanın fırlanması nəticəsində aldığı vəziyyətə isə bucağın son tərəfi deyəcəyik.



Dönmə bucaqlarını Dekart koordinat müstəvisində təsvir edərkən bucağın başlanğıc tərəfi olaraq absis oxunun müsbət istiqaməti ilə üst-üstə düşən şüa qəbul edilir. Koordinat başlanğıcı bucağın təpəsini, dönmədən alınan tərəf isə son tərəfi göstərir.

Koordinat oxları koordinat müstəvisini 4 rübə ayırır. Bucağın son tərəfinin hansı rübdə olmasından asılı olaraq onun qiyməti müəyyən intervalda dəyişir.

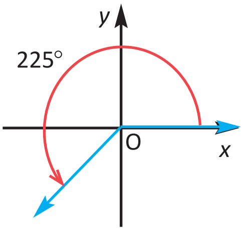




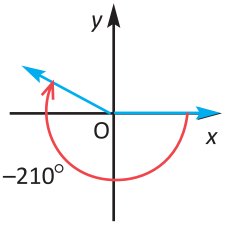
Koordinat müstəvisi üzərində şüanı koordinat başlanğıcına nəzərən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində və ya əks istiqamətdə döndərməklə müxtəlif ölçülü bucaqlar yaratmaq olar.

Dönmə saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətində olduqda bucağın ölçüsü müsbət, saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində olduqda isə mənfi qəbul edilir.

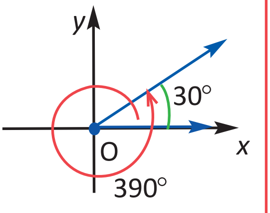
müsbət bucaq



mənfi bucaq



Son tərəf koordinat başlanğıcına nəzərən bir və ya bir neçə dəfə dönə bilər. Bir tam dönmə ilə 360° -li bucaq yaranır. Koordinat müstəvisi üzərində tərəfləri üst-üstə düşən sonsuz sayda dönmə bucaqları vardır. Məsələn, 30°-li bucaqla 390° -li bucağın tərəfləri üst-üstə düşür. Həmçinin –330°, –690°, 750°, ... dərəcə ölçülü bucaqların tərəfləri də 30°-li bucaqın son tərəfləri üst-üstə düşür. Ümumiyyətlə, verilən hər hansı $\alpha°$ bucağının dərəcə ölçüsü üzərinə tam dönməyə uyğun olan 360°-nin misillərini əlavə etmək və ya çıxmaqla son tərəfi bu bucaqla üst-üstə düşən bucaqları tapmaq olar. Başqa sözlə α bucağı ilə $\alpha + 360° \cdot n$ (burada n istənilən tam ədəddir) dönmə bucaqlarının son tərəfləri eyni vəziyyətdə olub, üst-üstə düşürlər.

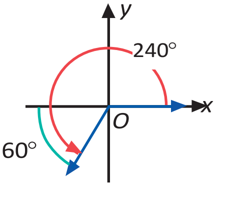


Nümunə 1. Verilən ölçülərdə dönmə bucaqları çəkin, son tərəfinin hansı rübdə olduğunu müəyyən edin.

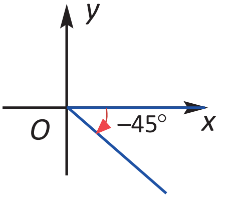
a) 240° b) –45° c) 510°

Həlli:

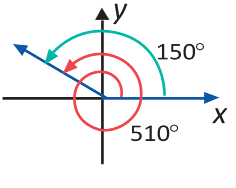
a) $240° = 180° + 60°$
Bucağın işarəsi müsbətdir. Bucağın son tərəfi saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə başlanğıc tərəfdən 180° + 60° qədər döndərməklə çəkilir. Son tərəf III rübdədir.



b) –45°
Bucağın işarəsi mənfidir. Bucağın son tərəfi başlanğıc vəziyyətdən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində döndərməklə absis oxunun müsbət istiqaməti ilə 45°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir.
Son tərəf IV rübdədir.



c) $510° = 360° + 150°$
Bucağın son tərəfi başlanğıc tərəfdən saat əqrəbi hərəkətinin əks istiqamətində başlanğıc tərəflə 150°-li bucaq əmələ gətirməklə çəkilir. Son tərəf II rübdədir.

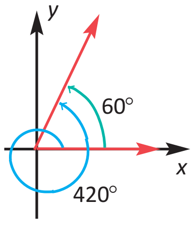


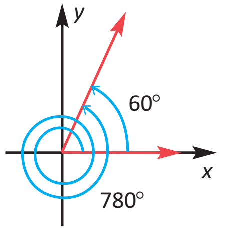
Nümunə 2. Koordinat müstəvisində 60°-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən iki müsbət, bir mənfi dönmə bucağı göstərin və dərəcə ölçülərini yazın.

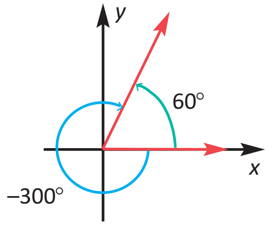
Həlli:

Müsbət bucaqlar: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$ $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

Mənfi bucaq: $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$







Öyrənmə tapşırıqları

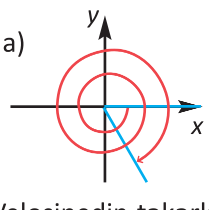
1. α bucağı hansı rübün bucağıdır? Çəkin, göstərin.
a) $\alpha = 170^\circ$ b) $\alpha = 290^\circ$ c) $\alpha = -100^\circ$ d) $\alpha = 320^\circ$ e) $\alpha = -10^\circ$

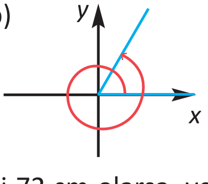
2. 0° və 360° aralığında elə α dönmə bucağı göstərin ki, son tərəfi verilən bucaqla üst-üstə düşsün.
a) 420° b) –210° c) –330° d) 700° e) –200°

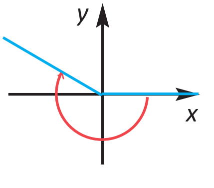
3. Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən bir müsbət, bir mənfi bucağı dərəcə ölçüsü ilə yazın və çəkin.
a) 200° b) 80° c) –100° d) 130° e) –70°

4. Hər bir dərəcə ölçüsünün hansı şəkildəki dönmə bucağıma uyğun olduğunu müəyyən edin.

1) –210° 2) 420° 3) – 780°

a)


b)


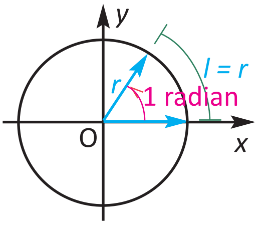
c)


5. Velosipedin təkərlərinin diametri 72 sm olarsa, verilən məsafələri qət edənə qədər təkərlərin dönməsinə uyğun bucaq neçə dərəcə olar? Hesabalamaları kalkulyatorla yerinə yetirin.

a) 10 m b) 27 m c) 240 m

Bucağın radian və dərəcə ölçüsü

Uzunluğu radiusa (r) bərabər olan qövsə (l) uyğun mərkəzi bucağın ölçüsünə **1 radian** deyilir. Uzunluğu radiusun 2 mislinə (3 mislinə və s.) bərabər olan qövsə uyğun mərkəzi bucağın ölçüsü 2 radian (3 radian və s.) olar.



Qövsün uzunluğunun çevrənin radiusuna nisbəti uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünü göstərir: $\boldsymbol{\alpha = \frac{l}{r}}$

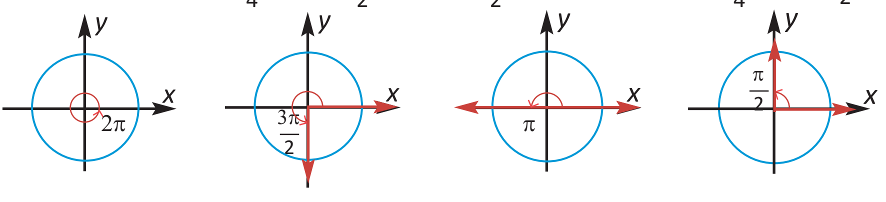
Çevrənin uzunluğu $2\pi r$-dir. Radiusa (r) bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq 1 radiandırsa, $2\pi r$-ə bərabər qövsə uyğun mərkəzi bucaq $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ olar. Aşağıda tam dönmənin müəyyən hissələrinə uyğun bucaqların radian ölçüləri göstərilib.

tam dönmə: 2π radian

3/4 dönmə: $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

1/2 dönmə: $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$

1/4 dönmə: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$



Bir tam dönmədə yaranan bucağın radian ölçüsü 2π , dərəcə ölçüsü isə 360°-dir. Yəni, 2π radian = 360°. Buradan radian və dərəcə ölçüləri arasındakı qarşılıqlı əlaqəni müəyyən etmək olar.

Radianın dərəcəyə çevrilməsi:

2π radian = 360°

$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$

$1 \text{ radian} \approx 57^\circ$

Dərəcənin radiana çevrilməsi:

2π radian = 360°

$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ radian

$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$ radian

Deməli, π rad = 180°. Adətən, “rad” işarəsi yazılmır, məsələn, π rad = 180° əvəzinə, $\pi = 180^\circ$ yazılır.

Aydındır ki, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ olar.

Nümunə. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radian, radian ölçüsü ilə verilmiş bucağı dərəcə ölçüsü ilə ifadə edin: a) 60°; b) $\frac{5\pi}{3}$

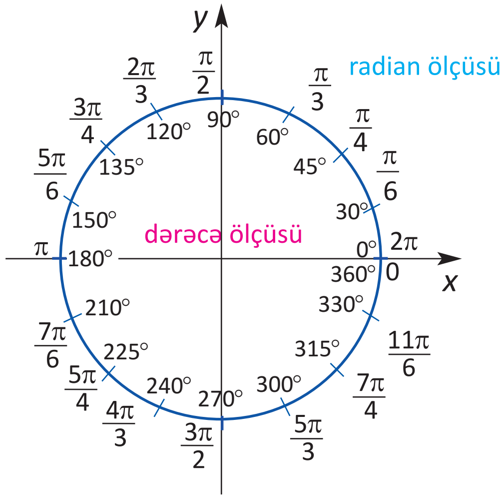
Həlli: a) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$ radian $= \frac{\pi}{3}$ radian $\approx 1{,}047$ radian

b) $\frac{5\pi}{3}$ radian $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$

Birinci rübdə yerləşən bəzi bucaqların radian və dərəcə ölçülərinin qarşılıqlı qiymətlərinə görə bu bucaqların misli olan bucaqların radian ölçüsünü tapmaq olar.

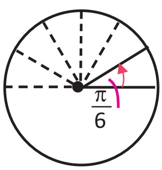
Məsələn, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ olduğundan 150° -li bucağın radian ölçüsü,

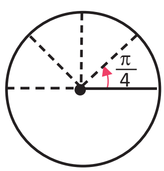
$150^\circ = 5 \cdot 30^\circ = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ olar.

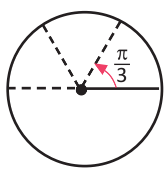


Öyrənmə tapşırıqları

6. Şəkildəki dönmə bucaqlarının hər biri tam dönmənin hansı hissəsini təşkil eidr? Bu bucağın dərəcə ölçüsünü yazın.

a) 

b) 

c) 

7. Verilən dönməyə uyğun bucaqların dərəcə və radian ölçülərini yazın.

1) çevrənin $\frac{1}{9}$ - i 2) çevrənin $\frac{2}{3}$ -si 3) çevrənin $\frac{4}{5}$ -ü

8. Verilən ölçüdə dönmə bucağını koordinat müstəvisi üzərində təsvir edin.

a) 40° b) 310° c) -150° d) 150° e) 780°

f) $\frac{2\pi}{3}$ g) $-\pi$ h) $\frac{5\pi}{2}$ i) $-\frac{\pi}{2}$ j) $\frac{3\pi}{2}$

9. Dərəcə ölçüsü ilə verilmiş bucağı radianla ifadə edin.

a) 60° b) 120° c) -45° d) 450° e) -270° f) 15°

10. Radian ölçüsü verilmiş bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{3\pi}{8}$ d) $-\frac{5\pi}{2}$ e) 1 f) 2 g) 3

11 Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən və $(0;\ 2\pi)$ intervalında yerləşən bucağı radianla ifadə edin.

1) $-\frac{\pi}{3}$ 2) $-\frac{3\pi}{4}$ 3) $-\frac{19\pi}{4}$ 4) $\frac{16\pi}{3}$

12. a) Verilən bucaqlarla son tərəfləri üst-üstə düşən dörd bucaq müəyyən edin.

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{7\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{6}$ 4) $-\frac{4\pi}{3}$

b) Verilən dönmə bucaqlarından hansı ikisinin son tərəfləri üst-üstə düşür?

1) $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{2}$ 3) $410°$, $-410°$ 4) $227°$, $-493°$

c) Verilən bucaqlarla son tərəfləri üst-üstə düşən bucaqları ümumi şəkildə yazın.

1) $-60°$ 2) $\frac{\pi}{5}$ 3) $-\frac{\pi}{2}$ 4) $100°$

13. Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən və verilmiş aralıqda yerləşən dönmə bucaqları yazın.

a) $65°$, $90° \le \theta < 720°$ b) $-40°$, $-180° \le \theta < 360°$ c) $140°$, $-720° \le \theta < 720°$

d) $\frac{\pi}{4}$, $-2\pi \le \theta < 2\pi$ e) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$ f) $\frac{2\pi}{3}$, $-2\pi \le \theta < 4\pi$

Nümunə. a) $65°$, $90° \le \theta < 720°$

$65°$-li bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını

$65° + 360 \cdot n$ və $65° - 360 \cdot n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

$n = 1$ $\quad 65° + 360 \cdot 1 = 425°$ $\quad 65° - 360 \cdot 1 = -295°$

$n = 2$ $\quad 65° + 360 \cdot 2 = 785°$ $\quad 65° - 360 \cdot 2 = -655°$

Göründüyü kimi, verilən intervala daxil olan yalnız $425°$-li bucaqdır.

Nümunə. e) $\frac{3\pi}{4}$, $-4\pi \le \theta < 4\pi$

Verilən bucaqla son tərəfi üst-üstə düşən dönmə bucaqlarını $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ və $\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$ $(n \in N)$ düsturlarına görə tapa bilərik.

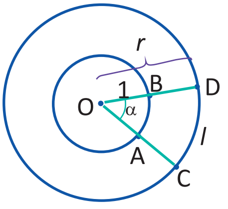
n	1	2	3
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{27\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4} - 2\pi n$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{4}$	$-\frac{21\pi}{4}$

$-4\pi \le \theta < 4\pi$ intervalında $\frac{3\pi}{4}$ bucağı ilə son tərəfi üst-üstə düşən bucaqlar: $\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{13\pi}{4}$

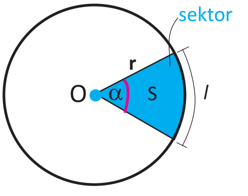
Qövsün uzunluğu. Sektorun sahəsi

Qövsün uzunluğu.
Radianın tərifinə görə $\frac{l}{r} = \alpha$ olduğundan qövsün uzunluğu bucağın radian ölçüsü ilə radiusun hasilinə bərabərdir: $l = \alpha \cdot r$

Qövsün uzunluğu çevrənin radiusu ilə düz mütənasibdir.

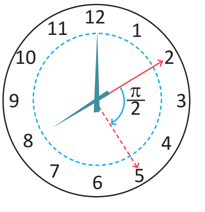


Sektorun sahəsi. Sektorun sahə düsturunu mərkəzi bucağın radian ölçüsündən istifadə etməklə də ifadə etmək olar. Sektorun sahəsinin (S) dairənin sahəsinə (πr^2) nisbəti uyğun mərkəzi bucağın (α radian) tam bucağa (2π) olan nisbətinə bərabərdir.



$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \qquad S = \frac{\alpha}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2 \qquad S = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

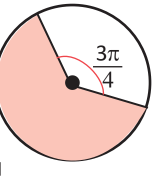
Nümunə 1. Saatın saniyə əqrəbinin uzunluğu 12 sm-dir. Saniyə əqrəbinin uc nöqtəsinin 15 saniyədə cızdığı qövsün uzunluğunu müəyyən edin.



Həlli. Saniyə əqrəbi 60 saniyədə bir tam dövr edir. Bu isə 2π radiandır. 15 saniyə tam dönmənin $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ hissəsinə uyğundur: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ radian.

Deməli, saniyə əqrəbi 15 saniyə ərzində $\frac{\pi}{2}$ radian mərkəzi bucağa uyğun qövs cızmış olur. Bu qövsün uzunluğu: $l = \alpha r = \frac{\pi}{2} \cdot 12 = 6\pi \approx 6 \cdot 3{,}14 = 18{,}84$ (sm)

Nümunə 2. Radiusu 8 sm olan dairənin rəngli sektorunun sahəsini və bu sektorun perimetrini tapın.



Rəngli hissəyə uyğun mərkəzi bucaq: $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Sektorunun sahəsi: $S = \frac{1}{2} \cdot \alpha r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{4} \cdot 8^2 = 40\pi$ (sm²)

Sektorun perimetri = iki radiusun uzunluğu + qövsün uzunluğu

$P = 2 \cdot 8 + \frac{5\pi}{4} \cdot 8 = 16 + 10\pi \approx 47{,}4$ (sm)

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilənlərə görə tələb olunan kəmiyyətləri tapın. Burada r çevrənin radiusu, α mərkəzi bucaq, l qövsün uzunluğudur.

a) $r = 8{,}5$ sm, $\alpha = 72°$, $l = \boxed{}$ sm b) $r = 5$ m, $l = 13$ m, $\alpha = \boxed{}$ radian

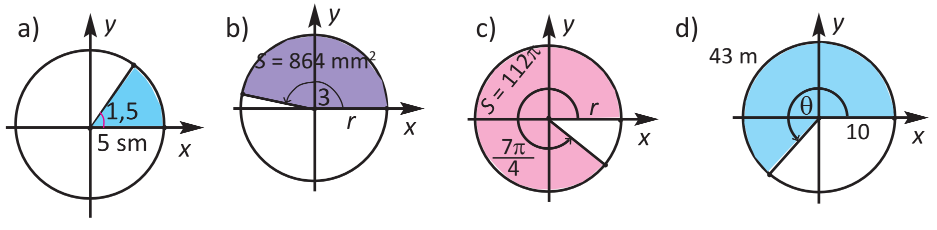
c) $r = \boxed{}$ mm, $\alpha = 1{,}8$ radian, $l = 4{,}5$ mm

2. Verilən mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu və sektorun sahəsini tapın.

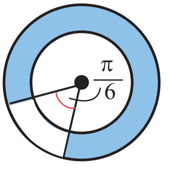
a) $r = 30$ sm; $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ b) $r = 12$ m; $\alpha = 90^\circ$ c) $r = 1{,}8$ dm; $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$

3. Saatın saniyə əqrəbinin uzunluğu 12 sm-dir. Saniyə əqrəbinin uc nöqtəsinin verilən vaxt müddətində cızdığı qövsün uzunluğunu tapın.
a) 45 san. b) 1 dəq. 20 san. c) 2 dəq. 15 san.

4. Hər bir şəkildə verilənlərə görə elə hesablamalar aparın ki, bütün dairələr üçün radius, mərkəzi bucaq, qövsün uzunluğu, sektorun sahəsi müəyyən edilmiş olsun.



5. Şəkildəki çevrələr konsentrikdir (mərkəzləri eynidir). Kiçik çevrənin radiusu 4 sm, böyük çevrənin radiusu isə 6 sm-dir. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



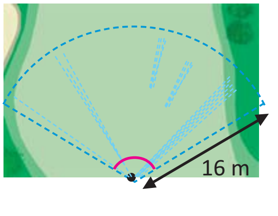
6. Spiralvari pilləkan 12 pillədən ibarətdir. Hər pillə radiusu 80 sm, mərkəzi bucağı $\dfrac{\pi}{8}$ olan sektor şəkilində olub hündürlüyü 15 sm-dir.

1) Hər pilləyə uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

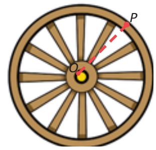
2) Bu pillələri sona qədər qalxan şəxs neçə dərəcə dönmüş olacaq?

3) Pillələri örtmək üçün 1 kv. m-nin qiyməti 36 manat olan xalça alınmalıdır. Bunun üçün ən azı nə qədər pul tələb olunur?

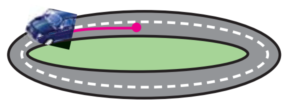
7. Suçiləyici hər 15 saniyədə bir dövrə vurur və ən uzağı 16 m məsafəyə su çiləyə bilir.
a) Suçiləyicinin $\dfrac{3\pi}{2}$ dönmədə suladığı sektorun sahəsini tapın.
b) Suçiləyicinin 2 dəqiqə ərzində fırlanmasına uyğun bucağı radian və dərəcə ilə ifadə edin.



Xətti sürət və bucaq sürəti



Çevrə üzrə hərəkətdə, məsələn, təkərin O nöqtəsi ətrafında fırlanması zamanı onun üzərində götürülmüş hər hansı P nöqtəsinin sürətini iki cür qiymətləndirmək olar. Bunlardan biri təkərin fırlanması zamanı nöqtənin qət etdiyi məsafəyə görə müəyyən edilən sürətdir. Bu xətti sürət adlanır. Digəri isə dönmə bucağına (mərkəzi bucaq) görə olan sürət, yəni bucaq sürəti adlanır.



$$\text{xətti sürət} = \frac{\text{gedilən yol}}{\text{zaman}}$$

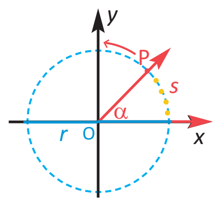
$$v_x = \frac{\alpha r}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, xətti sürət gedilən yolun (uyğun çevrə qövsünün uzunluğunun) zamana olan nisbətinə bərabərdir.

$$\text{bucaq sürəti} = \frac{\text{dönmə bucağı}}{\text{zaman}}$$

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

Cisim çevrə üzrə hərəkət edirsə, bucaq sürəti dönmə bucağının zamana olan nisbətinə bərabərdir.



Burada, α (radianla) t zamandakı dönmə (fırlanma) bucağıdır.

Xətti sürətlə bucaq sürəti arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\text{xətti sürət} = r \cdot \text{bucaq sürəti} \longrightarrow v_x = r \cdot \omega$$

Nümunə. Karusel dəqiqədə 8 tam dövr edir.

a) Karuselin bucaq sürətini tapın.

b) Mərkəzdən 3 m məsafədə olan at dəqiqədə neçə metr məsafə qət edir?

c) Mərkəzdən 2 m məsafədə olan at dəqiqədə neçə metr məsafə qət edir?

Həlli: a) Bir tam dövrə uyğun dönmə bucağı 2π-dir.

8 dövrdə bu bucaq $8 \cdot 2\pi = 16\pi$ olar.

Bucaq sürəti: $\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{16\pi}{1} = 16\pi$ radian/dəq

b) Mərkəzdən 3 m məsafədə olan at radiusu 3 m olan çevrə üzrə hərəkət edir.

Xətti sürət: $v_x = r \cdot \omega = 3 \cdot 16\pi = 48\pi \approx 151$ m/dəq

c) Mərkəzdən 2 m məsafədə olan at radiusu 2 m olan çevrə üzrə hərəkət edir.

Xətti sürət: $v_x = r \cdot \omega = 2 \cdot 16\pi = 32\pi \approx 101$ m/dəq

Göründüyü kimi, bucaq sürəti eyni olduğu halda, mərkəzdən daha uzaqda olan cisim daha sürətlə hərəkət edir, yəni xətti sürəti daha böyük olur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Saatın saniyə əqrəbinin uzunluğu 10 sm-dir.
a) saniyə əqrəbinin bucaq sürətini (rad/san ilə) tapın
b) 2 dəqiqə 15 saniyə ərzində əqrəbin uc nöqtəsi nə qədər məsafə qət edər?
c) saniyə əqrəbinin uc nöqtəsinin xətti sürətini (sm/san ilə) tapın.

2. Cismin t zamanda r radiuslu çevrə üzrə ω bucaq sürəti ilə qət etdiyi məsafəni tapın.

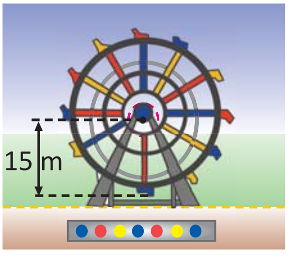
a) r = 6 dm, $\omega = \dfrac{\pi}{15}$ rad/san, $t = 10$ dəq.

b) r = 12 m, $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ rad/san, $t = 100$ san.

c) r = 30 sm, $\omega = \dfrac{\pi}{10}$ rad/san, $t = 25$ san.

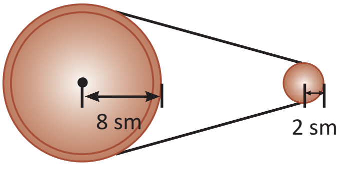
3. Radiusu 2 m olan çevrə üzrə hərəkət edən cisim hər 20 saniyədə 5 m yol gedir. Cismin xətti sürətini və bucaq sürətini tapın.

4. Karusel dəqiqədə 1,5 dövr edir.
a) Karuselin bucaq sürətini (rad/dəq) tapın.
b) Karuselin oxundan 15 m məsafədə olan nöqtənin xətti sürətini (m/dəq) tapın.



5. Diametri 72 sm olan velosiped təkəri 0,05 saniyədə 45° dönür. Velosiped 30 saniyədə nə qədər məsafə qət edər?

6. Radiusları 2 sm və 8 sm olan iki disk qayış vasitəsilə şəkildə göstərildiyi kimi birləşdirilmişdir. Kiçik disk dəqiqədə 3 dövr edirsə, böyük diskin dəqiqədə neçə dövr etdiyini tapın. **Göstəriş:** hər iki diskin çevrəsi üzərindəki nöqtələr eyni xətti sürətlə hərəkət edir.



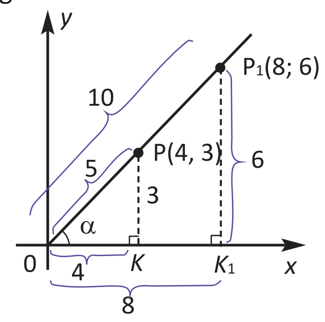
Praktik məşğələ

1) Son tərəfi P(4; 3) nöqtəsindən keçən α dönmə bucağı təsvir edin. P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın.

$$OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

2) OPK düzbucaqlı üçbucağından α iti bucağı üçün triqonometrik nisbətləri yazın.

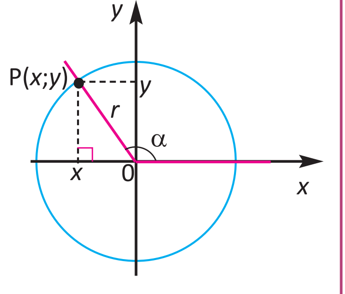
$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$



3) α dönmə bucağının triqonometrik nisbətlərinin qiymətləri bucağın tərəfi üzərində hansı nöqtənin qeyd edilməsindən asılıdırmı?

Triqonometrik funksiyalar

Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan, r radiuslu çevrə ilə α dönmə bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsi P(x; y) olsun.



- P nöqtəsinin ordinatının radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının sinusu deyilir:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

- P nöqtəsinin absisinin radiusun uzunluğuna nisbətinə α bucağının kosinusu deyilir:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

- P nöqtəsinin ordinatının absisinə nisbətinə α bucağının tangensi deyilir:

$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ (burada $x \neq 0$, yəni P nöqtəsi ordinat oxu üzərində deyil)

- P nöqtəsinin absisinin ordinatına nisbətinə α bucağının kotangensi deyilir:

$\cot\alpha = \dfrac{x}{y}$ (burada $y \neq 0$, yəni P nöqtəsi absis oxu üzərində deyil)

- α bucağının kosekansı bu bucağın sinusunun tərsidir:

$\csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{r}{y}$ (burada $y \neq 0$)

- α bucağının sekansı bu bucağın kosinusunun tərsidir:

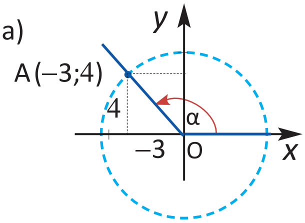
$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{r}{x}$ (burada $x \neq 0$)

Sinus, kosinus, tangens, kotangens, kosekans, sekans triqonometrik funksiyalar adlanır.

Nümunə. A (– 3; 4) nöqtəsi α dönmə bucağının son tərəfi üzərindədir.
a) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin.
b) α bucağı üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini müəyyən edin.

Həlli:

a)



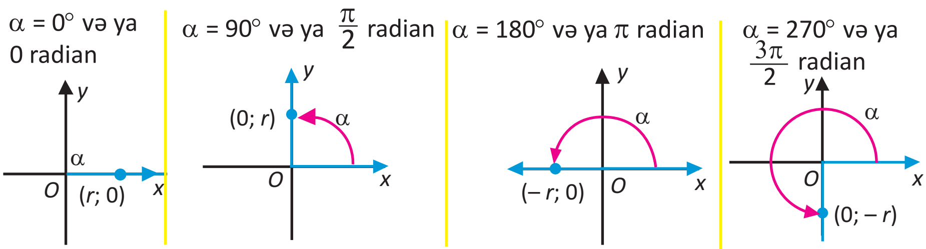
b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\sin \alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{4}{5}$ $\cos \alpha = \dfrac{x}{r} = -\dfrac{3}{5}$

$\tan \alpha = \dfrac{y}{x} = -\dfrac{4}{3}$ $\cot \alpha = \dfrac{x}{y} = -\dfrac{3}{4}$

$\sec \alpha = \dfrac{r}{x} = -\dfrac{5}{3}$ $\csc \alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{5}{4}$

Bəzən bucağın son tərəfi koordinat oxlarından birinin üzərində yerləşir. Bu halda yaranan dönmə bucaqlarının ölçüsü $\varphi = 0°$ və ya $\varphi = 0$ radian, $\varphi = 90°$ və ya $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ radian, $\varphi = 180°$ və ya $\varphi = \pi$ radian, $\varphi = 270°$ və ya $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ radian ola bilər. Bu halda x və y koordinatları ya sıfır, ya da mütləq qiymətcə çevrənin radiusuna bərabər olur.



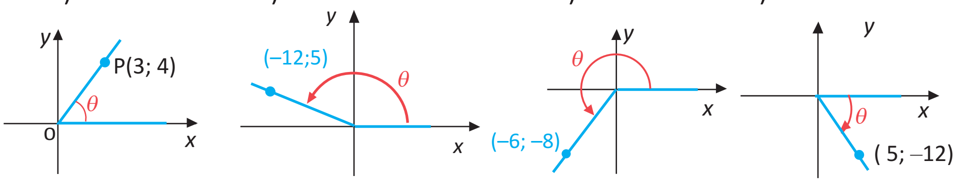
Öyrənmə tapşırıqları

1. Son tərəfi verilmiş nöqtədən keçən α dönmə bucağının sinus, kosinus və tangensini müəyyən edin.

a) A (1; 2) b) B (2; 4) c) C (4; 8)

2. 1) Şəkildə verilənlərə görə θ bucağı üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətini tapın.

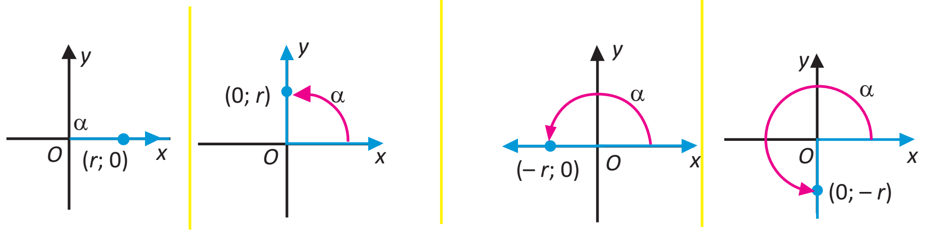
a) b) c) d)



2) Son tərəfi verilən nöqtədən keçən θ bucağı üçün triqonometrik nisbətlərin qiymətini tapın.

a) (–12; –9) b) (–1; 1) c) (8; 6) d) (3; –4)

3. a) $\alpha = 0°$; b) $\alpha = 90°$; c) $\alpha = 180°$; d) $\alpha = 270°$ olduqda triqonometrik nisbətlərin qiymətlərini (əgər mümkünsə) tapın.

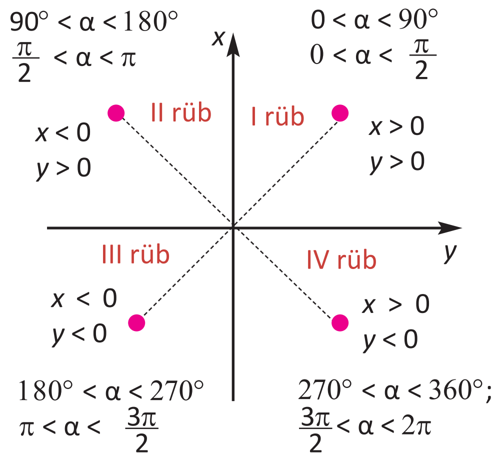


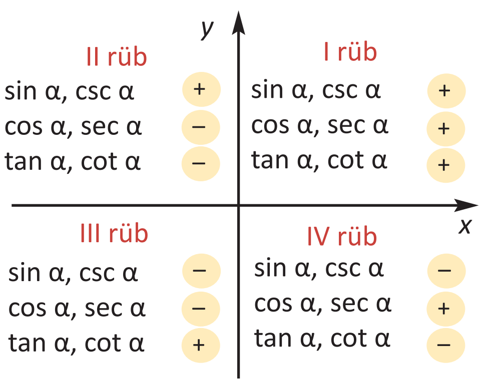
Triqonometrik funksiyaların işarəsi

Triqonometrik funksiyaların işarəsi verilən dönmə bucağının son tərəfinin hansı rübdə yerləşməsindən asılıdır.

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ olduğundan kosinusun işarəsi x-in işarəsi ilə,

$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ olduğundan sinusun işarəsi y-in işarəsi ilə üst-üstə düşür.





Nümunə. $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$ olduğuna görə $\cos\alpha$ -nın mümkün qiymətlərini tapın.

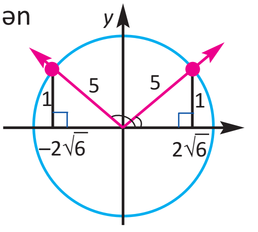
Həlli: Sinus müsbət olduğundan bucaq ya I, ya da II rübün bucağıdır.

$\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$, deməli, $r = 5$ və $y = 1$. $x^2 + y^2 = r^2$ tənliyindən

uyğun nöqtənin absisi: $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$.

Onda α I rüb bucağıdırsa, $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

α II rüb bucağıdırsa, $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ olar.



Öyrənmə tapşırıqları

4. Hər bir bucağa uyğun triqonometrik nisbətin işarəsini müəyyən edin.

a) $\sin 20°$ c) $\cos 100°$ e) $\tan 250°$ g) $\sin 200°$

b) $\cos 50°$ d) $\tan 140°$ f) $\sin 310°$ h) $\cos 280°$

5. İfadənin işarəsini müəyyən edin.

a) $\sin\dfrac{5\pi}{4}$ b) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\tan\dfrac{5\pi}{6}$ d) $\cot\dfrac{11\pi}{6}$

6. Verilənlərə görə α-nın hansı rübün bucağı olduğunu tapın.

a) $\sin\alpha > 0$ və $\cos\alpha < 0$ b) $\sin\alpha < 0$ və $\cos\alpha < 0$

c) $\cos\alpha < 0$ və $\tan\alpha > 0$ d) $\cot\alpha < 0$ və $\sin\alpha > 0$

7. İfadənin işarəsini müəyyən edin.

a) $\sin 200° \cdot \cos\dfrac{5\pi}{7} \cdot \tan 172°$ b) $\sin 160° \cdot \tan\dfrac{3\pi}{5} \cdot \cot 230°$

c) $\sin 310° \cdot \tan\dfrac{5\pi}{6} \cdot \tan\dfrac{7\pi}{6}$ d) $\cos\dfrac{7\pi}{5} \cdot \tan\dfrac{2\pi}{3} \cdot \sin\dfrac{11\pi}{6}$

8. θ ikinci rübün bucağı olarsa, ifadəni sadələşdirin.

a) $\sin\theta + |\sin\theta|$ b) $\cos\theta + |\cos\theta|$

9. $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ olarsa, $\cos\theta$-nın mümkün qiymətlərini tapın.

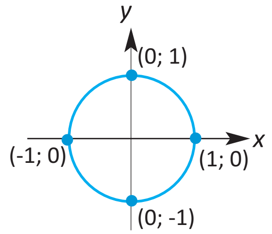
10. Damalı vərəqdə 1 damanı vahid qəbul edərək, mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 5 vahid olan çevrə çəkin. 0-360° intervalında olmaqla verilmiş şərtə uyğun dönmə bucaqlarını təsvir edin.

a) Sinusu $\dfrac{3}{5}$-ə bərabər olan b) Kosinusu $\dfrac{4}{5}$- ə bərabər olan

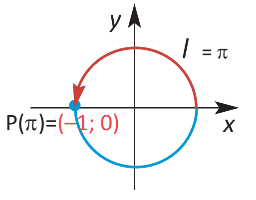
c) Sinusu $-\dfrac{4}{5}$ - ə bərabər olan d) Kosinusu $-\dfrac{3}{5}$ - ə bərabər olan

Vahid çevrə və triqonometrik funksiyalar

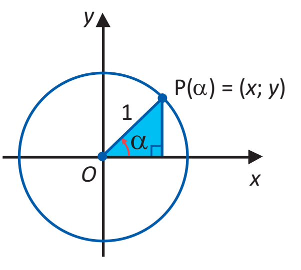
Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 1-ə bərabər olan çevrəyə vahid çevrə deyilir.
Vahid çevrənin üzərindəki nöqtələrin koordinatları $x^2 + y^2 = 1$ tənliyini ödəyir.



Vahid çevrə üzərində qövsün uzunluğu uyğun mərkəzi bucağın radian ölçüsünə bərabərdir. Vahid çevrə üzərində α radian dönmə bucağına uyğun nöqtəni P(α) ilə işarə edək. α bucağının hər bir qiymətinə çevrə üzərində bir nöqtə uyğundur.
Məsələn, $\alpha = \pi$ olarsa, bu (–1; 0) nöqtəsinə uyğundur.



P(α) = (x; y) nöqtəsi α bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişdiyi nöqtə olarsa, triqonometrik funksiyalarla nöqtənin koordinatları arasındakı əlaqəni aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

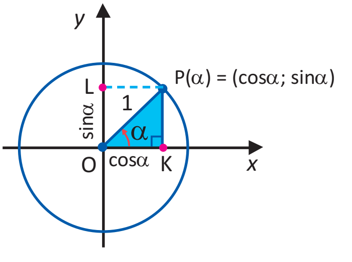


$$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

Deməli, vahid çevrə üzərində α dönmə bucağına uyğun nöqtəni koordinatları ilə P(α) = (cosα; sinα) kimi yazmaq olar.
α -nın qiyməti dəyişdikcə P nöqtəsi yerini dəyişir. Bu zaman hər bir nöqtənin absisinin qiyməti cosα, ordinatının qiyməti isə sinα olaraq ifadə edilir.

P(x;y) = P(cosα; sinα).

α-nın mümkün olan hər bir qiymətinə sin α, cos α -nın (tanα, cotα, secα, cscα) həqiqi ədədlər çoxluğundan yeganə qiyməti uyğundur.
Deməli, sinα, cosα α-dan asılı funksiyalardır.



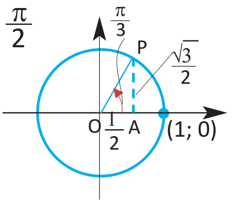
Həmçinin verilən koordinatlara görə tanα, cotα, secα və cscα triqonometrik funksiyaları tapılır.

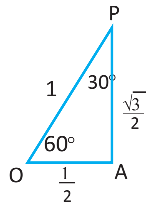
$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Vahid çevrə üzərində bəzi nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edək.
Bunun üçün aşağıdakı addımları yerinə yetirək.

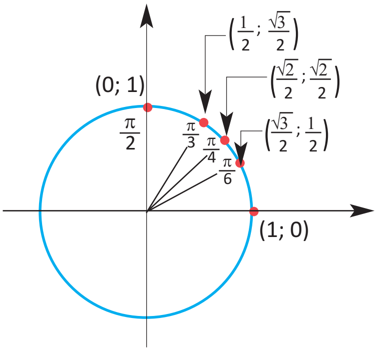
1) Vahid çevrə üzərində $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ dönmə bucaqlarına uyğun nöqtələrin koordinatlarını müəyyən etmək üçün bucaqları 30°- 60°- 90° və ya 45°- 45°- 90° olan üçbucaqlardan istifadə edək.



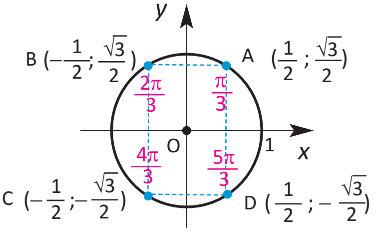


Müəyyən edilən koordinatları vahid çevrə üzərində qeyd edək.

Dönmə bucağı	Uyğun nöqtənin koordinatları
0	(1; 0)
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	(0; 1)

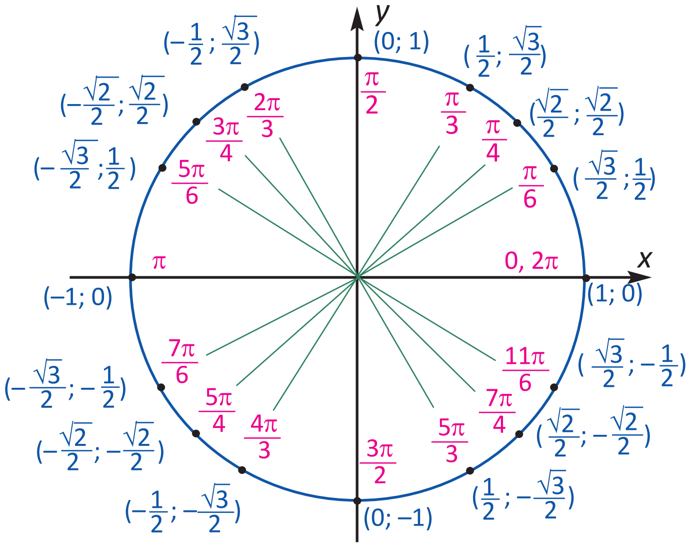


2) Vahid çevrə üzərində qeyd edilmiş hər hansı nöqtəyə, məsələn $\frac{\pi}{3}$, dönməsinə uyğun A$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nöqtəsinə simmetrik nöqtələri qeyd edək. Şəkildən göründüyü kimi, A nöqtəsi ilə simmetrik olan və II, III və IV rüblərdə yerləşən daha 3 nöqtə var.



B nöqtəsi A nöqtəsi ilə *y* oxuna nəzərən, C nöqtəsi koordinat başlanğıcına nəzərən, D nöqtəsi isə *x* oxuna nəzərən simmetrikdir. Bu dörd nöqtənin uyğun koordinatlarının mütləq qiymətləri bərabərdir, onlar yalnız işarələri ilə fərqlənirlər.

3) I rübdə müəyyən edilmiş digər nöqtələrin də simmetrik çevrilmələrinə uyğun yeni nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edək.
Nəticədə üzərində dönmə bucaqlarının və uyğun nöqtələrin koordinatlarının qeyd edildiyi aşağıdakı kimi vahid çevrə alınır.



Bəzi dönmə bucaqlarına uyğun triqonometrik funksiyaların qiymətlərini göstərən cədvəl quraq. Bu qiymətlərdən istifadə etməklə digər bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini müxtəlif üsullarla hesablamaq olar.

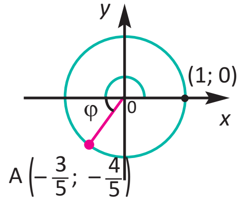
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*təyin olun-mayıb*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Nümunə. Absisi $-\frac{3}{5}$ olan və III rübdə yerləşən A nöqtəsi vahid çevrə ilə φ bucağının son tərəfinin kəsişmə nöqtəsidir.

a) A $(-\frac{3}{5}; y)$ nöqtəsinin ordinatını tapın.

b) Məsələnin şərtini əks etdirən şəkil çəkin və φ bucağı üçün altı triqonometrik funksiyanın qiymətini müəyyən edin.

Həlli:



a) $(-\frac{3}{5})^2 + y^2 = 1,\quad y^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25},\quad y = \pm\frac{4}{5}.$

Nöqtə III rübdə yerləşdiyi üçün $y = -\frac{4}{5}$

b) $\sin\varphi = -\frac{4}{5}\qquad \cos\varphi = -\frac{3}{5}$

$\tan\varphi = \frac{4}{3}\qquad \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{3}{4}\qquad \sec\varphi = -\frac{5}{3}\qquad \csc\varphi = -\frac{5}{4}$

Öyrənmə tapşırıqları

11. Nöqtələrin vahid çevrənin üzərində olub olmadığını yoxlayın.

a) $\left(\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ b) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}; \frac{2}{3}\right)$

c) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ d) $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}; \frac{5}{6}\right)$

12. Verilən şərtlərə görə vahid çevrə üzərində yerləşən nöqtənin verilməyən koordinatını tapın.

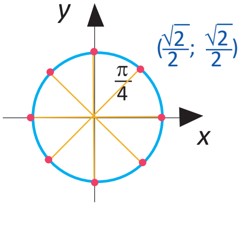
a) $\left(\frac{1}{4}; y\right)$ I rübdə b) $\left(-\frac{7}{8}; y\right)$ III rübdə

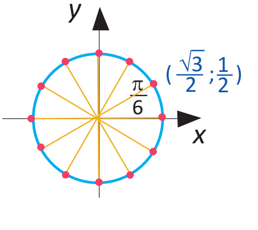
c) $\left(x; \frac{2}{3}\right)$ II rübdə d) $\left(x; -\frac{5}{7}\right)$ IV rübdə

13. a) Vahid çevrə üzərində absisi $\frac{1}{2}$ olan neçə nöqtə var? Bu nöqtələrin ordinatlarını tapın.

b) Vahid çevrə üzərində ordinatı $\frac{1}{2}$ olan neçə nöqtə var? Bu nöqtələrin absislərini tapın.

14. Vahid çevrə üzərində $\frac{\pi}{4}$ və $\frac{\pi}{6}$ addımları ilə qeyd edilmiş dönmə bucaqlarının qiymətini və uyğun nöqtənin koordinatlarını yazın.





15. Vahid çevrə üzərində verilən dönmə bucağına uyğun nöqtənin koordinatlarını müəyyən edin. Triqonometrik funksiyaların qiymətini tapın.

a) $\varphi = \pi$ b) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ c) $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ d) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

e) $\varphi = 3\pi$ f) $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ g) $\varphi = -\frac{4\pi}{3}$ h) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

16. Verilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini vahid çevrədən istifadə etməklə tapın.

a) $\varphi = -\frac{7\pi}{6}$ b) $\varphi = \frac{13\pi}{6}$

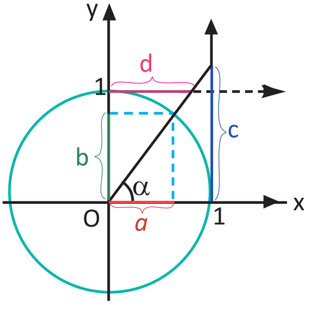
17. $A(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$ vahid çevrə ilə φ bucağının tərəfinin kəsişmə nöqtəsidir. Uyğun şəkli çəkin, φ bucağının triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

18. Vahid çevrə üzərində dönmə bucaqlarına uyğun nöqtələri qeyd etməklə müqayisə edin.

a) sin 15^o və sin 20^o b) sin 40^o və sin 70^o

c) cos 20^o və cos 40^o d) cos 10^o və cos 50^o

19. Şəklə görə $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \tan\alpha$, $d = \cot\alpha$ olduğunu nəzərə alaraq a, b, c və d ədədlərini artan sıra ilə yazın.
a) $\alpha = 45^o$ olduqda
b) $\alpha = 53^o$ olduqda
c) $\alpha = 20^o$ olduqda



20. $\alpha = 30^\circ$ olarsa, ifadənin qiymətini hesablayın:
a) $3\sin\alpha$ b) $\sin 3\alpha$ c) $2\cos\alpha$ d) $\cos 2\alpha$

21. $\sin\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın:
a) $\alpha = 30^\circ$ olduqda b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduqda

22. $\alpha = 15^\circ$ olduqda ifadənin qiymətini tapın.
a) $2\sin(3\alpha + 15^\circ) + 3\cot(90^\circ - 2\alpha)$ b) $\tan(4\alpha - 15^\circ) - 2\cos(2\alpha + 30^\circ)$

Vahid çevrə üzərində istənilən nöqtənin koordinatları $-1 \le x \le 1$; $-1 \le y \le 1$ şərtini ödədiyindən alırıq ki: $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-1 \le \sin\alpha \le 1$.
Yəni, $\sin\alpha$ və $\cos\alpha$ -nın ən böyük qiyməti 1-ə, ən kiçik qiyməti –1-ə bərabərdir.

Nümunə. $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: $-1 \le \sin\alpha \le 1$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$-2 \le 2\sin\alpha \le 2$ *hər iki tərəfə 3 əlavə edək*

$-2 + 3 \le 3 + 2\sin\alpha \le 2 + 3.$ $1 \le 3 + 2\sin\alpha \le 5$

Deməli, $3 + 2\sin\alpha$ ifadəsinin ƏKQ-i 1-ə, ƏBQ-i 5-ə bərabərdir.

23. Bərabərlik mümkündürmü?
a) $\sin\alpha = \frac{7}{12}$ b) $\cos\beta = \frac{4}{3}$ c) $\sin\alpha = \sqrt{5} - 1$ d) $\cos\beta = \sqrt{2} - 1$

24. Bərabərsizlik doğrudurmu?
a) $\sin 45^\circ + \cos 60^\circ > 1$ b) $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} > 1$

25. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.
a) $2 + 3\sin\alpha$ b) $1 - \sin\alpha$ c) $1 + \cos\alpha$ d) $3 - 2\cos\alpha$

26. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.
a) $2 + |\sin\alpha|$ b) $2 - |\cos\alpha|$ c) $1 + \sin^2\alpha$ d) $4 + \cos^2\alpha$

27. Vahid çevrə üzərində $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şərtini ödəyən dönmə bucağına uyğun neçə nöqtə var?

28. Vahid çevrə üzərində verilən şərti ödəyən α dönmə bucağına uyğun nöqtələrin koordinatlarını yazın.
a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. Vahid çevrə üzərində $P(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$ nöqtəsinə uyğun dönmə bucağının $\frac{7\pi}{4}$ olduğu məlumdur. Son tərəfi bu bucaqla üst-üstə düşən mənfi bucaq göstərin və həmin bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

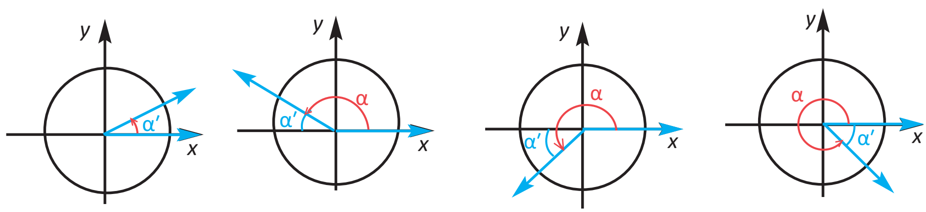
30. Vahid çevrədən istifadə etməklə $[0; 2\pi]$ aralığında $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bərabərliyini ödəyən dönmə bucaqlarını göstərin.

31. $A(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nöqtəsinin α bucağı qədər dönməyə uyğun olduğunu bilərək verilən dönmə bucaqlarına uyğun nöqtələrin koordinatlarını tapın.
a) $\alpha + \pi$ b) $\pi - \alpha$ c) $2\pi + \alpha$ d) $-\alpha$

Uyğun iti bucaq və istənilən bucağın triqonometrik funksiyası

90°-dən böyük (və ya 0°-dən kiçik) bucaqlar üçün triqonometrik funksiyaların qiymətini hesablayarkən **uyğun iti bucağın** triqonometrik funksiyalarının qiymətlərindən istifadə etmək əlverişlidir. Dekart koordinat sistemində istənilən $90^\circ < \alpha < 360^\circ$ bucağına uyğun iti bucaq α bucağının son tərəfinin absis oxu ilə üst-üstə düşən düz xətlə əmələ gətirdiyi α′ iti bucağıdır.

I rüb bucağı **II rüb bucağı** **III rüb bucağı** **IV rüb bucağı**



$\alpha' = \alpha$ $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ $\alpha' = \alpha - 180^\circ$ $\alpha' = 360^\circ - \alpha$

Verilən bucağın və uyğun iti bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətləri modulca bərabərdir.

Nümunə. $\alpha = 210^\circ$ bucağa uyğun iti bucağı müəyyən edin.
sinα , cosα, tanα funksiyalarının qiymətini hesablayın.

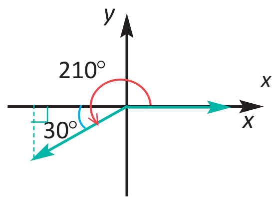
Həlli: 210°-li bucağın son tərəfi III rübdə yerləşir.

Uyğun iti bucaq: $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

III rübdə yerləşən bucaqların triqonometrik funksiyalarının işarəsini nəzərə alaq:

$\sin 210^\circ = -\dfrac{1}{2}$ $\cos 210^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 210^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

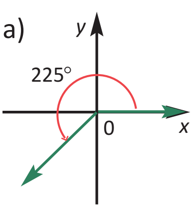


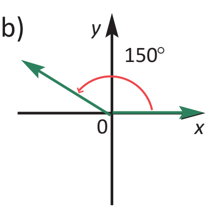
Öyrənmə tapşırıqları

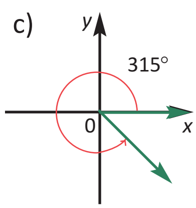
32. Verilən bucaqlara uyğun iti bucaqları müəyyən edin.

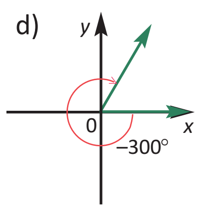
1) 240° 2) -515° 3) -170° 4) 315° 5) $\dfrac{25\pi}{4}$ 6) $-\dfrac{11\pi}{3}$ 7) $-\dfrac{3\pi}{4}$

33. Verilən bucaqlar üçün sinα , cosα, tanα, cotα-nın qiymətini hesablayın.

a) 

b) 

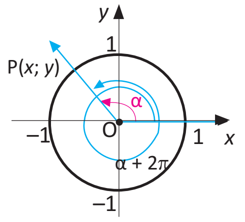
c) 

d) 

Tam sayda dövrlər və uyğun iti bucaq

Verilən bucağın qiyməti tam sayda dövrlər qədər dəyişdikdə triqonometrik funksiyaların qiymətləri dəyişmir.

Hər hansı α ($0^\circ \le \alpha < 360^\circ$) bucağının triqonometrik funksiyalarının qiyməti son tərəfləri α bucağı ilə üst-üstə düşən $\alpha + 360^\circ \cdot k$ ($k \in Z$) bucaqlarının triqonometrik funksiyalarının qiyməti ilə eynidir.

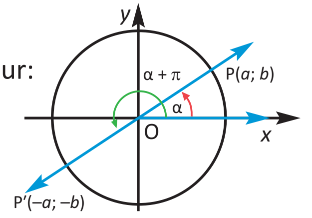


$\sin(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$

Qeyd edək ki, bucaq tam dövrün yarısı qədər dəyişdikdə də tangens və kotangensin qiymətləri dəyişmir.

Ümumi halda ($k \in Z$) aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:



$\tan(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(\alpha + \pi k) = \tan\alpha$

$\cot(\alpha + 180^\circ \cdot k) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(\alpha + \pi k) = \cot\alpha$

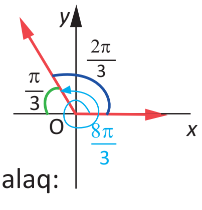
İstənilən bucağın triqonometrik funksiyalarını aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar:

- verilən α bucağının son tərəfinin hansı rübdə yerləşdiyini müəyyən edin;
- uyğun α′ iti bucağını müəyyən edin;
- iti bucağa uyğun triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın;
- bucağın aid olduğu rübə görə triqonometrik funksiyaların işarəsini müəyyən edin.

Nümunə. $\alpha = \dfrac{8\pi}{3}$ olduqda sinα , cosα, tanα-nın qiymətini hesablayın.

Həlli:

- $\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi$ olduğundan bucağın son tərəfi II rübdədir.
- Uyğun iti bucaq: $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$



- $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\quad \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
- II rübdə triqonometrik funksiyaların işarəsini nəzərə alaq:

$\sin\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \cos\dfrac{8\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $\quad \tan\dfrac{8\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Öyrənmə tapşırıqları

34. Kalkulyatordan istifadə etmədən verilən bucaqlara uyğun triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesablayın.

1) $\sin 405^\circ$ 2) $\cos 420^\circ$ 3) $\tan 405^\circ$ 4) $\sin 390^\circ$ 5) $\csc 450^\circ$

6) $\cot 390^\circ$ 7) $\sec 420^\circ$ 8) $\cos \frac{33\pi}{4}$ 9) $\sin \frac{9\pi}{2}$ 10) $\tan \frac{4\pi}{3}$

35. a) -60°-li bucağa uyğun iti bucaq neçə dərəcədir?

b) $\cos(-60^\circ)$, $\sin(-60^\circ)$, $\tan(-60^\circ)$, $\cot(-60^\circ)$-ni tapın.

c) -60° və 60°-li bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini müqayisə edin.

36. İfadənin qiymətini kalkulyatordan istifadə etmədən tapın.

a) $\cos(-60^\circ)$ c) $\sin(-315^\circ)$ e) $\sin 495^\circ$ g) $\cos 600^\circ$

b) $\sin(-120^\circ)$ d) $\tan(-210^\circ)$ f) $\cos(-225^\circ)$ h) $\tan 420^\circ$

37. $\sin 25^\circ \approx 0{,}42$ və $\cos 25^\circ \approx 0{,}91$ olduğuna görə kalkulyatordan istifadə etmədən ifadənin təqribi qiymətini tapın.

a) $\sin 155^\circ$ c) $\cos 335^\circ$ e) $\sin 205^\circ - \cos 155^\circ$

b) $\cos 205^\circ$ d) $\sin 335^\circ$ f) $\cos 385^\circ - \sin 515^\circ$

38. a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ və α bucağının II rübün bucağı olduğunu bilərək, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$-nın qiymətlərini hesablayın.

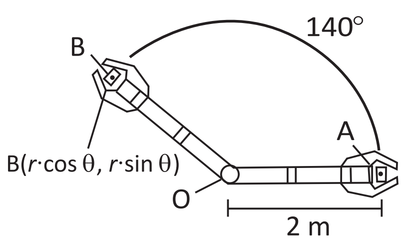
b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ və α bucağının IV rübün bucağı olduğunu bilərək, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$-nın qiymətlərini tapın.

39. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablayın:

a) $\sin 400^\circ - \sin 40^\circ$ c) $\frac{\cos 410^\circ}{\cos 50^\circ}$ e) $\frac{\tan 200^\circ}{\tan 20^\circ}$

b) $\sin(-270^\circ) + \cos 450^\circ$ d) $\cos(-720^\circ) + \tan 720^\circ$

40. Qolunun uzunluğu 2 m olan robot əşyanı A nöqtəsindən B nöqtəsinə gətirmişdir. Bu zaman robotun qolu 140° dönmüşdür. Robotun hərəkətinin dönmə bucağı kimi təsvirinə görə B nöqtəsinin koordinatlarını tapın.



Çevirmə düsturları

Biz uyğun iti bucaqdan istifadə etməklə istənilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini hesablaya bilirik. İstənilən bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətini çevirmə düsturlarından da istifadə etməklə tapmaq olar. Düzbucaqlı üçbucaq üçün triqonometrik nisbətlərdən və koordinat müstəvisində simmetrik çevrilmələrdən istifadə etməklə triqonometrik funksiyalar arasındakı münasibətləri göstərən çevirmə düsturlarını yazaq.

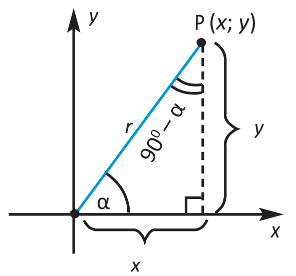
İti bucağı α olan düzbucaqlı üçbucaqda α və $90^\circ - \alpha$ iti bucaqları üçün triqonometrik nisbətləri yazaq:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{r}$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{x}{y}$

$\cot\alpha = \frac{x}{y}$ $\qquad$ $\cot(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$



Bərabərliklərin cüt-cüt müqayisəsinə görə α və $90^\circ - \alpha$ bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimi olar.

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha$

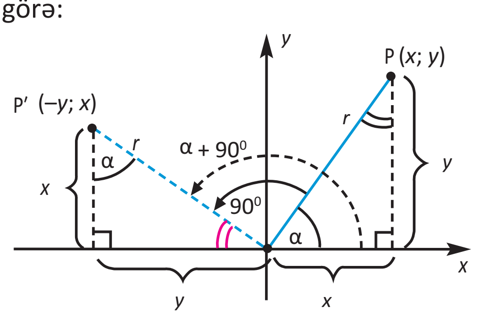
α dönmə bucağının son tərəfini daha 90° döndərək. Bu zaman onun üzərində olan $P(x;y)$ nöqtəsi $P'(-y;x)$ nöqtəsinə çevrilir.
Triqonometrik funksiyaların tərifinə görə:

$\sin(\alpha + 90^\circ) = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$

$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha,$

$\tan(\alpha + 90^\circ) = -\frac{x}{y} = -\cot\alpha$

$\cot(\alpha + 90^\circ) = -\frac{y}{x} = -\tan\alpha$

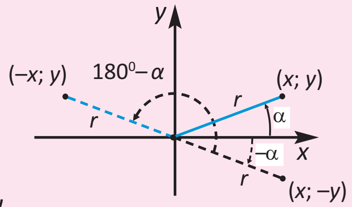


Bu düsturları aşağıdakı şəkildə yazaq:

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$

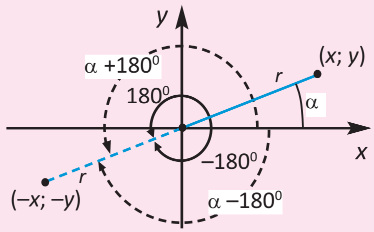
$\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan\alpha$

Şəkildən göründüyü kimi, y oxuna nəzərən əksetmə x oxuna nəzərən əksetmənin 180° dönməsinə ekvivalentdir. Koordinatların dəyişməsinə görə triqonometrik funksiyalar arasında aşağıdakı bərabərlikləri yazmaq olar.



$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $\quad\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$

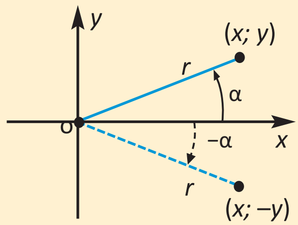
Şəkildən göründüyü kimi, α bucağının son tərəfi 180° döndükdə $(x;y)$ nöqtəsi $(-x;-y)$ nöqtəsinə çevrilir.

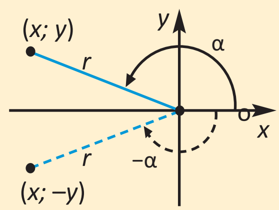


$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha$

$270^\circ + \alpha$ dönmə bucağının triqonometrik funksiyaları üçün də oxşar düsturları almaq üçün $270^\circ + \alpha = 90^\circ + (180^\circ + \alpha)$ şəklində yazıb, uyğun düsturları ardıcıl tətbiq etmək kifayətdir. Məsələn:
$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ + (180^\circ + \alpha)) = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^\circ + \alpha) = \cos(90^\circ + (180^\circ + \alpha)) = -\sin(180^\circ + \alpha) = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$
İndi isə $270^\circ - \alpha$ dönmə bucaqları üçün uyğun düsturları yazaq. Məsələn:
$\sin(270^\circ - \alpha) = \sin(270^\circ + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos(270^\circ + (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

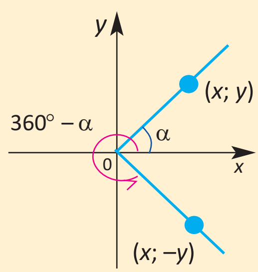
x oxuna nəzərən bucağın son tərəfinin əksetməsi ilə onun üzərindəki nöqtələrin koordinatları şəkildə göstərildiyi kimi dəyişir. Yəni, x oxuna əksetmə zamanı yalnız y koordinatının işarəsi dəyişir.





Deməli, kosinus x koordinatından asılı olduğundan dəyişmir, sinus isə işarəsini dəyişir. Beləliklə, α və $-\alpha$ bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasında əlaqə aşağıdakı kimi olur:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$



α və $360^\circ - \alpha$ dönmə bucaqlarının son tərəfləri x oxuna nəzərən simmetrikdir: $(x; y) \to (x; -y)$.
Buradan alırıq:
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $\quad\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$

1) Arqument $180° \pm \alpha$, $360° \pm \alpha$ olarsa, bu arqumentin triqonometrik funksiyası α arqumentinin eyni adlı funksiyasına çevrilir.
2) Arqument $90° \pm \alpha$ və ya $270° \pm \alpha$ şəklindədirsə, funksiya adını dəyişməklə (sinus kosinusa və tərsinə, tangens kotangensə və tərsinə) α arqumentinin funksiyasına çevrilir.
Hər iki halda alınan funksiyanın işarəsi α bucağını iti bucaq qəbul etməklə çevrilən funksiyanın verilən rübdəki işarəsi ilə eyni olur.

Nümunə 1. $\sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}5878$ olduğu məlumdur. Çevirmə düsturlarından istifadə etməklə $\cos\frac{3\pi}{10}$-ni hesablayın.

Həlli: $\frac{3\pi}{10}$ bucağı I rübdə yerləşir.
Bu bucağı $\frac{\pi}{2}$ və α iti bucağının fərqi ilə ifadə edə bilərik.

$$\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} \qquad \alpha = \frac{5\pi}{10} - \frac{3\pi}{10} \qquad \alpha = \frac{\pi}{5}$$

$$\cos\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}5878$$

$$\cos\frac{3\pi}{10} \approx 0{,}5878$$

Nümunə 2. Çevirmə düsturlarını tətbiq edərək ifadənin qiymətini tapın.
a) $\sin 210°$ b) $\cos 300°$ c) $\tan 135°$

Həlli: a) $\sin 210° = \sin(180° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$
b) $\cos 300° = \cos(270° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$
c) $\tan 135° = \tan(90° + 45°) = -\cot 45° = -1$

Öyrənmə tapşırıqları

1. a) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ olduğunu bilərək çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ olduğunu göstərin.
b) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğunu bilərək çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə $\sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğunu göstərin.

2. a) $\cos\frac{\pi}{7} = \sin\theta$ olduğu məlumdur. Çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə θ iti bucağını tapın.
b) $\cot\frac{\pi}{5} = \tan\beta$ olduğu məlumdur. Çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə β iti bucağını tapın.

3. c-nin $\cot(6c - \frac{\pi}{4}) = \tan(2c + \frac{\pi}{4})$ bərabərliyini ödəyən bir neçə qiymətini göstərin.

4. a) $\cos 35° \approx 0{,}8191$ olduğu məlumdur. Çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə $\sin 125°$ -nin qiymətini tapın.

b) $\tan\frac{2\pi}{9} \approx 0{,}8391$ olduğu məlumdur. Çevirmə düsturlarının tətbiqi ilə $\cot\frac{5\pi}{18}$ -in qiymətini tapın.

5. 1) Son tərəfi $\alpha = 32°$-li bucağın son tərəfinin əksetməsi ilə alınan ən kiçik müсbət bucağı tapın.

a) *x* oxuna nəzərən
b) *y* oxuna nəzərən
c) koordinat başlanğıcına nəzərən
2) eyni tapşırıqları $\alpha = 220°$ üçün də yerinə yetirin.

6. Bucağın triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini iki üsulla hesablayın:
1) Son tərəfi verilmiş bucaqla eyni olan və $[0°; 360°)$ aralığında yerləşən bucağın triqonometrik funksiyasına gətirməklə;
2) $-\alpha$ və α bucaqlarının triqonometrik funksiyaları arasındakı əlaqəni tətbiq etməklə.

a) $\alpha = -30°$ b) $\alpha = -120°$ c) $\alpha = -60°$

7. Sadələşdirin.

a) $\sin(180° + \alpha)$ b) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ c) $\cos(180° + \alpha)$
d) $\tan(180° - \alpha)$ e) $\cot(90° + \alpha)$ f) $\cos(\pi - \alpha)$

8. a) $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ eyniliyinin doğruluğunu α bucağı I rübdə yerləşdiyi halda isbat etdik. Bucağı II rübdə yerləşdirməklə eyniliyi isbat edin.

b) $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ eyniliyinin $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ bucaqları üçün də doğru olduğunu göstərin.

9. Çevirmə düsturlarını tətbiq edərək, verilmiş ifadəni iti bucağın triqonometrik funksiyası ilə ifadə edin və qiymətini hesablayın.

a) $\cos 210°$ b) $\cos 120°$ c) $\sin 150°$ d) $\tan 300°$
e) $\cos\frac{5\pi}{4}$ f) $\tan\frac{7\pi}{6}$ g) $\cot\frac{5\pi}{3}$ h) $\sin\frac{2\pi}{3}$

10. İfadəni sadələşdirin.

a) $\sin(\alpha - 180°)$ b) $\cos(\alpha - 270°)$ c) $\tan(\alpha - 90°)$
d) $\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2})$ e) $\cos(\alpha - \pi)$ f) $\tan(\alpha - \frac{3\pi}{2})$

11. Sadələşdirin.

a) $\sin^2(\pi + \alpha)$ b) $\cos^2(180° - \alpha)$ c) $\cot^2(90° + \alpha)$

12. 0°-dən 90°-yə kimi bucağın triqonometrik funksiyasına çevirin.

a) $\sin(-170°)$ b) $\cos(-160°)$ c) $\tan 130°$ d) $\cot 320°$

13. Qonşu bucaqların sinuslarının bərabər, kosinuslarının isə qarşılıqlı əks ədədlər olduğunu göstərin.

14. α, β, γ üçbucağın bucaqlarıdır. İsbat edin:
a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$ b) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

15. İfadəni sadələşdirin.

a) $\frac{\sin 80°}{\cos 10°}$ b) $\frac{\cos 70°}{\sin 20°}$ c) $\tan 40° \cdot \cot 50°$ d) $\sin 72° - \cos 18°$

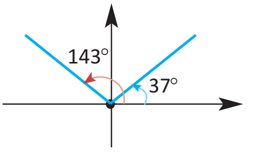
16. Sadələşdirin.

a) $\sin(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha) + \tan(180° - \alpha) + \cot(270° - \alpha)$
b) $\cos(20° - \alpha) + \sin(250° + \alpha)$

17. [0°; 360°) aralığında sinusu verilmiş ədədə bərabər olan bütün bucaqları tapın.
a) $\sin\alpha = 0{,}6018$ b) $\sin\alpha = 0{,}3$ c) $\sin\alpha = 0{,}8$

Nümunə. $0 \le \alpha < 360°$ intervalında $\sin\alpha \approx 0{,}6018$ olan bütün bucaqları tapın.

Həlli: Kalkulyatorda $\boxed{\sin^{-1}}$ düyməsini basaraq 0,6018 yığsaq, ekranda görünən ədədə görə α bucağının $\approx 37°$ olduğunu taparıq. Sinus ikinci rübdə də müsbət olduğundan $180° - 37° = 143°$ bucağının da sinusu təqribən 0,6018 olar.

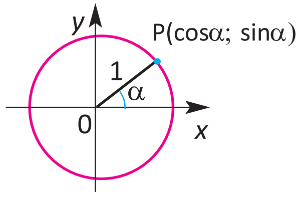


18. [0°; 360°) aralığında sinusu verilmiş ədədə bərabər olan bütün bucaqları tapın.

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları arasındakı münasibətlər

İstənilən α bucağı üçün $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ eyniliyinin doğruluğunu vahid çevrə üzərində götürülmüş nöqtələrin koordinatlarına görə izah etmək olar.



$x^2 + y^2 = 1$ ***vahid radiuslu çevrənin tənliyi***

$\mathbf{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$ ***vahid çevrə üzərindəki nöqtə üçün x=cosα və y=sinα olduğuna görə***

Vahid çevrə üzərindəki nöqtənin koordinatlarına və triqonometrik funksiyaların tərifinə görə alarıq:

$\cos\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən istənilən α bucağı üçün $\mathbf{\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

Bu bərabərliklərdən alırıq ki, eyni zamanda $\cos\alpha \neq 0$ və $\sin\alpha \neq 0$ şərtini ödəyən α bucaqları üçün $\mathbf{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1}$ eyniliyi doğrudur.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bərabərliyinin hər iki tərəfini $\cos^2\alpha$-ya ($\cos\alpha \neq 0$) və ya $\sin^2\alpha$-ya ($\sin\alpha \neq 0$) bölsək, alarıq:

$$\mathbf{1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}, \qquad \mathbf{1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Eyni bucağın triqonometrik funksiyaları üçün yuxarıda aldığımız münasibətlərə əsas triqonometrik eyniliklər deyilir.

Əsas triqonometrik eyniliklərə görə yaza bilərik:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ → $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ → $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Əsas triqonometrik eyniliklərin köməyi ilə verilmiş triqonometrik ifadəni sadələşdirmək və triqonometrik funksiyaların birinin verilmiş qiymətinə görə digərlərinin qiymətlərinin modulunu hesablamaq olur.

Nümunə 1. Əsas triqonometrik eyniliklərdən istifadə etməklə isbat edin:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{2}{\cos x}$$

İsbatı:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\sin x)}=$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x\,(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}$$

Nümunə 2. $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ və β bucağı III rüb bucağı olduğuna görə digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesablayın.

Həlli: $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ düsturundan alırıq ki: $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$

β III rübün bucağı olduğundan $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$

Onda $\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$ və $\cot\beta=\dfrac{1}{\tan\beta}=\dfrac{3}{4}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Sadələşdirin.

a) $1-\sin^2\alpha$
b) $1-\cos^2\alpha$
c) $\sin^2\beta-1$
d) $\cos^2\beta-1$
e) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$
f) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cot^2\alpha$
g) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha-\cos^2\alpha$
h) $\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$

2. $\sin\alpha=0{,}6$ və $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ olarsa, $\cos\alpha$ və $\tan\alpha$ -nı tapın.

3. $\cos\alpha=0{,}8$ və $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ olarsa, $\sin\alpha$ və $\cot\alpha$ -nı tapın.

4. Verilənlərə görə β bucağının triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.

a) $\sin\beta=-\frac{4}{5}$ və $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$
b) $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ və $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$
c) $\tan\beta=1$ və $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$
d) $\cot\beta=-\sqrt{3}$ və $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

5. Sadələşdirin.

a) $(1-\cos^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)$

b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

c) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

d) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

e) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}:(1+(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha})^2)$

f) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}:(1+(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha})^2)$

6. $\tan\alpha=2$ olarsa, verilmiş ifadənin qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\dfrac{3\sin\alpha-5\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$

7. $\sqrt{4-4\sin^2\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin:

a) $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$ olduqda

b) $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$ olduqda.

8. Eynilikləri isbat edin.

a) $\dfrac{1-(\sin x-\cos x)^2}{2}=\cos x\cdot\sin x$

b) $\dfrac{1+\sec x}{\sin x+\tan x}=\csc x$

c) $\dfrac{1-\cos^2x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\tan^2x$

d) $\dfrac{1+\tan x}{\sin x+\cos x}=\sec x$

9. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cot^2\alpha$, $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ olduqda

b) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$, $\tan\alpha=2$ olduqda

10. İfadəni sadələşdirin və verilənlərə görə qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha=0{,}1$ olduqda

b) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\sin\alpha=-\dfrac{1}{8}$ olduqda

11. $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6$ olduğunu bilərək, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ hasilini tapın.

12. $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{5}{2}$ olduqda, $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın.

13. Verilmiş bərabərlikləri ödəyən dönmə bucağı varmı?

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ və $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ b) $\sin\beta = \frac{1}{3}$ və $\cos\beta = \frac{2}{3}$

c) $\tan\gamma = \frac{3}{4}$ və $\cot\gamma = \frac{4}{3}$ d) $\tan\theta = \frac{2}{3}$ və $\cot\theta = \frac{3}{4}$

14. İfadəni sadələşdirin.

a) $(1 - \sin(-\alpha))\cdot(1 - \sin\alpha)$ b) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha \cdot \tan^2(-\alpha)$

c) $\dfrac{1 - \sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} + \tan(-\alpha)$ d) $\sin^2(-\alpha) + \tan\alpha \cdot \cot(-\alpha)$

15. İsbat edin ki, β-nın mümkün qiymətlərində ifadənin qiyməti β-dan asılı deyil.

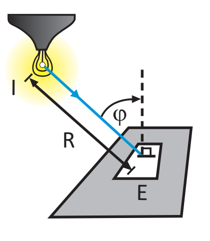
a) $(\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$ b) $(\tan\beta + \cot\beta)^2 - (\tan\beta - \cot\beta)^2$

16. İfadənin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.
a) $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$ b) $\sin\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$

17. Çevirmə düsturlarını və əsas triqonometrik eynilikləri tətbiq etməklə ifadənin qiymətini tapın.

a) $\cos^2 74° + \cos^2 16°$
b) $\tan 48° \cdot \tan 42°$
c) $\sin 20° \cdot \cos 70° + \cos 20° \cdot \sin 110°$
d) $\cos 40° \cdot \sin 130° + \sin 50° \cdot \cos 140°$

18. İşıqlanma hər hansı mənbədən səthə düşən işıq selinin miqdarını göstərir və $E = \dfrac{I}{R^2\cos\varphi}$ düsturu ilə müəyyən edilir. I burada işığın şiddətini, R isə işıq mənbəyindən məsafəni göstərir. Bu düsturun $E = \dfrac{I \cdot \tan\varphi}{R^2\sin\varphi}$ düsturu ilə ekvivalent olduğunu göstərin.



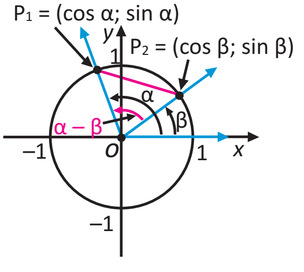
İki bucağın cəmi və fərqinin triqonometrik funksiyaları

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ **$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$**

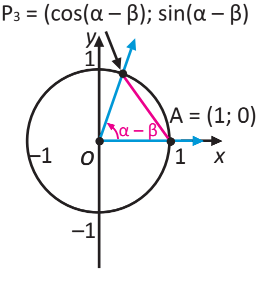
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ **$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$**

✓ Əvvəlcə $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ eyniliyini isbat edək.
a) şəklində göstərilən α və β bucaqlarının son tərəfləri vahid çevrəni, uyğun olaraq $P_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$ və $P_2(\cos\beta; \sin\beta)$ nöqtələrində kəsir.
α – β bucağını b) şəklində olduğu kimi yerləşdirək.
α – β bucağının son tərəfinin vahid çevrə ilə kəsişmə nöqtəsi $P_3(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$ olsun.
$\Delta P_1OP_2 \cong \Delta P_3OA$ (TBT əlamətinə görə) olduğundan $P_1P_2 \cong P_3A$.

a)



b)



$P_1P_2 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$ ***iki nöqtə arasında məsafə düsturu***

$P_3A = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$ ***bərabərliyin xassəsi***

$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$
$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$ ***müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi***

$(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) =$
$= (\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$ ***toplama əməlinin xassələrinin və***
$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$ ***triqonometrik eyniliklərin tətbiqi***

$2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2\cos(\alpha - \beta)$ ***bərabərliyin xassəsi***
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ***eynilik isbat edildi***

✓ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı:
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$
$\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ olduğunu nəzərə alaq
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ***eynilik isbat edildi***

✓ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı:

$$\sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)}_{\text{çevirmə düsturuna görə}} = \underbrace{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)}_{\text{qruplaşdırma}} =$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta}_{\text{fərqin kosinusu düsturuna görə}} = \underbrace{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}_{\text{çevirmə düsturlarını nəzərə almaqla}}$$

✓ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ eyniliyinin isbatı:

$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Nümunə 1. $\cos\frac{7\pi}{12}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

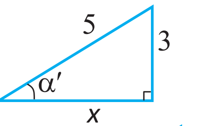
Həlli: $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

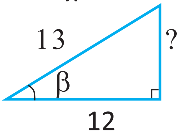
Nümunə 2. $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ və $\cos\beta = \frac{12}{13}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ olduqda $\sin(\alpha-\beta)$-nın qiymətini tapın.

Həlli: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. α-ya uyğun iti bucaq α' olarsa,

$\sin\alpha' = \frac{3}{5}$. Qarşıdakı katet 3, hipotenuz isə 5 olduqda, bitişik katet $x = \sqrt{25-9} = 4$ və α III rüb bucağı olduğundan $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ olur.



$\cos\beta = \frac{12}{13}$ olduğundan analoji qayda ilə $\sin\beta = \frac{5}{13}$ alarıq.



$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$

Tangens və kotangens üçün də toplama düsturlarını yazmaq olar:

$$\tan(\alpha+\beta) = \underbrace{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}_{\text{tərifə görə}} = \underbrace{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}}_{\text{toplama düsturlarına görə}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}}_{\text{surət və məxrəci } \cos\alpha\cdot\cos\beta \text{ hasilinə bölməklə}} = \underbrace{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}_{\text{sadələşdirmə}}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

Oxşar qayda ilə göstərin ki: $\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sin 75°$ b) $\cos 75°$ c) $\sin(-15°)$ d) $\cos 15°$

e) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$ f) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$ g) $\sin\frac{\pi}{12}$ h) $\cos\frac{7\pi}{12}$

2. Sadələşdirin. Qiymətini hesablayın.

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 2) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}$ 4) $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

3. Toplama düsturlarını tətbiq edərək, bərabərliklərin doğruluğunu yoxlayın.

a) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ b) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

c) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ d) $\cos(270°-\alpha)=-\sin\alpha$

4. Sadələşdirin.

a) $\sin 12°\cdot\cos 18°+\cos 12°\cdot\sin 18°$ b) $\cos 17°\cdot\cos 43°-\sin 17°\cdot\sin 43°$

c) $\cos 68°\cdot\cos 8°+\cos 82°\cdot\cos 22°$ d) $\sin 23°\cdot\cos 7°+\cos 157°\cdot\cos 97°$

5. Sadələşdirin.

a) $\cos(36°+\alpha)\cdot\cos(24°-\alpha)-\sin(36°+\alpha)\cdot\sin(24°-\alpha)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

6. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\dfrac{\sin 20°\cdot\cos 10°+\cos 20°\cdot\sin 10°}{\sin 21°\cdot\cos 9°+\cos 21°\cdot\sin 9°}$ b) $\dfrac{\cos 66°\cdot\cos 6°+\sin 6°\cdot\cos 24°}{\cos 65°\cdot\cos 5°+\sin 65°\cdot\sin 5°}$

7. a) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ olarsa, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$-nı tapın.

b) $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ və $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ olarsa, $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$-nı tapın.

8. $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, α III rübün, β isə IV rübün bucağı olarsa, tapın:

a) $\sin(\alpha+\beta)$ b) $\cos(\alpha-\beta)$

9. α və β III rübün bucaqları və $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$ olduqda tapın:

a) $\sin(\alpha-\beta)$ b) $\cos(\alpha+\beta)$

10. Üçbucağın iki iti bucağının sinusları uyğun olaraq $\frac{7}{25}$ və $\frac{4}{5}$-ə bərabərdir. Üçbucağın üçüncü bucağının kosinusunu tapın.

11. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\tan 13^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 13^\circ \cdot \tan 47^\circ}$ b) $\dfrac{\tan 46^\circ - \tan 1^\circ}{1 + \tan 46^\circ \cdot \tan 1^\circ}$

12. $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ olarsa, $\tan(45^\circ + \alpha)$-nı tapın.

13. $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ olarsa, tapın:

a) $\tan(\alpha + \beta)$ b) $\tan(\alpha - \beta)$

14. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\tan 15^\circ$ b) $\tan 75^\circ$ c) $\cot 105^\circ$

15. $\cos 72^\circ \sin 48^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$ ifadəsinin qiymətini çevirmə düsturlarından və toplama düsturlarından istifadə etməklə hesablayın.

16. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha \sin\beta}$ b) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin\beta}$

17. Sadələşdirin.

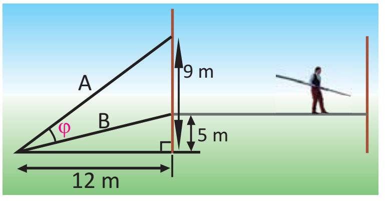
a) $\dfrac{\tan(45^\circ + \alpha) - \tan\alpha}{1 + \tan(45^\circ + \alpha)\cdot\tan\alpha}$ b) $\dfrac{\tan(\frac{\pi}{8} + \alpha) + \tan(\frac{\pi}{8} - \alpha)}{1 - \tan(\frac{\pi}{8} + \alpha)\cdot\tan(\frac{\pi}{8} - \alpha)}$

18. a) $\tan(\alpha + \beta) = -1$, $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{2}$ olarsa, $\tan 2\beta$-nı tapın.

b) $\cot(\alpha + \beta) = 2$, $\cot(\alpha - \beta) = 1$ olarsa, $\tan 2\alpha$-nı tapın.

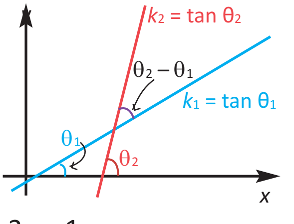
Tətbiq tapşırıqları

19. Kəndirbazın qurğusunda A kəndiri 9 m hündürlükdə dirəyə bağlanmışdır. Kəndirbaz B kəndiri üzərində 5 m hündürlükdə yeriyir. A və B kəndirləri dirəkdən 12 m aralıda yerə bərkidilib. Onlar arasında qalan φ bucağının sinusunu hesablayın və bu bucağın dərəcə ölçüsünü ondabir dəqiqliklə tapın.



20. Bucaq əmsalları k_1 və k_2 olan iki düz xəttin kəsişməsindən alınan $\theta_2 - \theta_1$ bucağını aşağıdakı düsturla müəyyən etmək olar:

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$



a) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ və $y = 2x - 1$; b) $y = x + 2$ və $y = 3x - 1$

düz xətlərinin kəsişməsindən alınan iti bucağı tapın.

Praktik məşğələ

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ cəmini aşağıdakı addımlarla hasilə çevirin.

1) $\begin{cases} x + y = 70^\circ \\ x - y = 10^\circ \end{cases}$ tənliklər sistemini həll etməklə elə iki bucaq tapın ki, cəmi 70°-yə, fərqi 10°-yə bərabər olsun: $x = 40^\circ$ $y = 30^\circ$

2) $70^\circ = 40^\circ + 30^\circ$, $10^\circ = 40^\circ - 30^\circ$ yazmaqla verilmiş ifadəni sadələşdirin.

$\sin 70^\circ + \sin 10^\circ = \sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ) = \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ +$

$+ \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \sin 40^\circ$

Cəmin (fərqin) hasilə çevrilməsi

$\alpha = x + y$
$\beta = x - y$ olarsa, $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) =$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y.$ Deməli,

$$\boldsymbol{\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Oxşar qayda ilə alırıq: $\boldsymbol{\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$

$$\boldsymbol{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \qquad \boldsymbol{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

1. Hasilə çevirin: a) $\sin 52^\circ + \sin 32^\circ$ b) $\sin 72^\circ - \sin 32^\circ$
c) $\cos 32^\circ + \cos 2^\circ$ d) $\cos 42^\circ - \cos 22^\circ$

2. İfadənin qiymətini hesablayın.
a) $\cos 130^\circ + \sin 80^\circ - \sin 20^\circ$ b) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ - \cos 10^\circ$

3. Cəmi (fərqi) hasilə çevirin.
$\sin 6x + \sin 2x$ | $\cos 4x - \cos 2x$ | $\sin \dfrac{\pi}{12} - \sin \dfrac{5\pi}{12}$ | $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

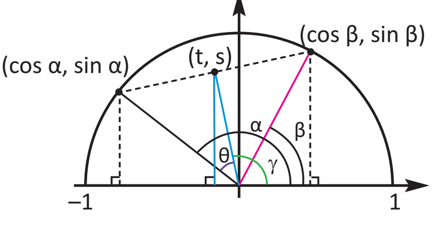
4. Sadələşdirin.
a) $\dfrac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$ b) $\dfrac{\cos 6\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha}$ c) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha}$

5. Aşağıdakı bərabərlikləri şəkillə əlaqələndirin və doğru olduğunu göstərin.

$\theta = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} = s = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

$\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{2} = t = \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}$



6. Hasil şəklində göstərin: a) $\dfrac{1}{2} + \sin \alpha$ b) $\dfrac{1}{2} + \cos \alpha$ c) $2 \cos \alpha - \sqrt{3}$

Hasili cəmə çevirmə düsturları

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$

Bu eyniliklərin doğruluğunu toplama düsturlarından istifadə etməklə göstərək:

tərəf-tərəfə toplanır

$$+\begin{array}{l}\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y\end{array}$$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$

tərəf-tərəfə toplanır

$$+\begin{array}{l}\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\end{array}$$

$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$

Aşağıdakı eyniliyi analoji qayda ilə isbat edin.

$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$

7. Hasilin cəmə çevrilməsi eyniliklərini tətbiq etməklə hesablayın.

a) $\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$ b) $\sin 105^\circ\cdot\sin 15^\circ$ c) $\cos 75^\circ\cdot\cos 75^\circ$

8. Hasilləri cəm və ya fərq şəklində ifadə edin.

$\sin 6x\cdot\sin 2x$	$\sin x\cdot\cos 2x$	$\cos 9x\cdot\cos 2x$	$\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$
$\cos 7x\cdot\cos 3x$	$\sin 8x\cdot\sin 4x$	$\sin 2x\cdot\cos 3x$	$\cos\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$

9. $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ olduğunu isbat edin.

10. Hesablayın.

a) $2\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$ b) $2\sin 40^\circ\cdot\sin 10^\circ+\cos 50^\circ$

11. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\sin 15^\circ\cdot\cos 7^\circ-\cos 79^\circ\cdot\cos 11^\circ-\sin 86^\circ\cdot\sin 4^\circ$

b) $\cos 73^\circ\cdot\cos 17^\circ-\sin 13^\circ\cdot\cos 21^\circ-\cos 86^\circ\cdot\cos 4^\circ$

12. Vuruqlara ayırın.

a) $\sin 2x\cdot\cos 4x-\sin 6x\cdot\cos 8x$ b) $\cos 5x\cdot\cos x-\cos 4x\cdot\cos 2x$

İkiqat arqumentin triqonometrik funksiyaları

Toplama düsturları sin 2α, cos 2α, tan 2α ifadələrini α bucağının triqonometrik funksiyası ilə ifadə etməyə imkan verir.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Beləliklə, ikiqat bucağın düsturları adlanan eynilikləri alırıq:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,} \qquad \mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,} \qquad \mathbf{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

Yarım arqumentin düsturları

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Buradan:

$$\mathbf{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \qquad \mathbf{\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \qquad \mathbf{\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

Bu düsturlarda α-nın əvəzinə $\frac{\alpha}{2}$ yazmaqla alarıq:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Yarımqat bucaqlar üçün triqonometrik düsturlar:

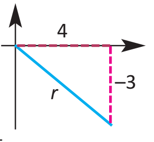
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Bu bərabərliklərdə sağ tərəfin işarəsi $\frac{\alpha}{2}$ bucağının hansı rübdə yerləşməsindən asılıdır.

Nümunə 1. $\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli: $\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

Nümunə 2. Kalkulyatordan istifadə etmədən α bucağının IV rübün bucağı və $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ olduğunu bilərək, sin 2α və cos 2α-nın qiymətlərini tapın.



Həlli: $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ $\qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

Nümunə 3. $\cos\frac{\pi}{8}$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlli: Yarımbucaq eyniliklərindən istifadə edək: $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\frac{\pi}{8}$ bucağı I rübdə yerləşir və bu rübdə kosinus funksiyası müsbətdir.

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+(\sqrt{2}/2)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Öyrənmə tapşırıqları

13. Sadələşdirin.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\tan^2\alpha}$ b) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \cos\alpha$

c) $(\tan\alpha+\cot\alpha)\cdot\sin 2\alpha$ d) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

14. $\cos\alpha = -0{,}8$ və $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olarsa, tapın:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\tan 2\alpha$

15. $\sin\beta = -\frac{12}{13}$ və β III rübün bucağı olarsa, tapın:

a) $\sin 2\beta$ b) $\cos 2\beta$ c) $\tan 2\beta$

16. Sadələşdirin.

a) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}$

17. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$ b) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

c) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$ d) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{2\tan 22^\circ 30'}{1-\tan^2 22^\circ 30'}$ f) $\frac{4\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$

18. Tapın:

a) $\sin 22^\circ 30'$ b) $\cos 22^\circ 30'$ c) $\tan 22^\circ 30'$ d) $\tan 15^\circ$ e) $\cos 67{,}5^\circ$

19. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ olarsa, tapın:

a) $\sin\frac{\alpha}{2}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ c) $\tan\frac{\alpha}{2}$

20. Verilənlərə görə $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$-nı tapın.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | $\tan\alpha = \frac{3}{4}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

21. Verilənlərə görə $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$ -ni tapın.

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

22. İki bucağın cəminin triqonometrik eyniliklərindən istifadə etməklə aşağıdakı eyniliklərin doğruluğunu isbat edin.
a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

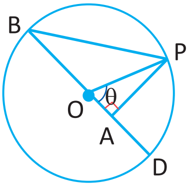
23. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ və $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ olduğunu bilərək:
a) sin 2α-nın qiymətini tapın b) cos 2α-nın qiymətini tapın
c) α bucağının radian ölçüsünü kalkulyatorun köməyilə hesablayın.
d) *a* və *b* bəndində apardığınız hesablamaların doğruluğunu da kalkulyatorla yoxlayın.

24. Eynilikləri isbat edin.
a) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$ b) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$

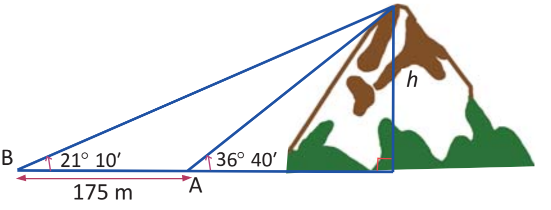
Tətbiq tapşırıqları

25. O mərkəzli vahid çevrə üzərində verilənlərə görə eyniliyinin doğru olduğunu isbat edin.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$



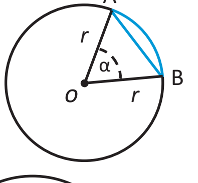
26. Dağın hündürlüyünü tapmaq üçün planda aralarındakı məsafə 175 m olan A və B nöqtələri seçilmiş və dağın təpəsinə yüksəliş bucağı ölçülmüşdür.



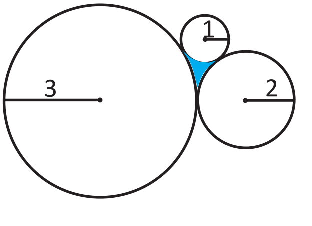
Bucaqların ölçüləri $\angle A = 36^\circ 40'$, $\angle B = 21^\circ 10'$ olmuşdur.
Bu plana görə dağın hündürlüyü neçə metrdir?

27. İstənilən ΔABC-də aşağıdakı eyniliklərin doğru olduğunu isbat edin.
($\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ olduğunu nəzərə alın).
a) $\sin(\angle A + \angle B) = \sin\angle C$
b) $\cos\angle C = \sin\angle A \cdot \sin\angle B - \cos\angle A \cdot \cos\angle B$

28. a) Seqmentin sahəsi üçün $S_{seq} = \frac{1}{2}r^2(\alpha - \sin\alpha)$ düsturunun doğru olduğunu göstərin.
Burada α - mərkəzi bucaqdır (radianla).
b) Radiusu 2 sm olan dairədə 3 sm uzunluqlu vətərin ayırdığı seqmentin sahəsini tapın.



29. Radiusları 1; 2; 3 olan üç çevrə şəkildə göstərildiyi kimi xaricdən toxunurlar. Rəngli sahəni hesablayın.



Nümunə 1. $\cos x\,(\tan x - \sec x)$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli:

$\cos x\,(\tan x - \sec x) =$

$= \cos x \cdot \tan x - \cos x \cdot \sec x =$ *vurmanın paylama qanunu*

$= \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} - \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} =$ *$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ və $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ əvəzetməsi*

$= \sin x - 1$ *sadələşdirmə*

Nümunə 2. $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$ ifadəsini vuruqlara ayırmaqla sadələşdirin.

Həlli: $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x =$

$= \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) =$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$= \cos^2 x \cdot 1 = \cos^2 x$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ düsturunun tətbiqi*

Nümunə 3. $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ ifadəsini sadələşdirin.

Həlli:

$\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} =$ *$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ əvəzetməsi*

$= \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{1 + \sin x}{1 + \sin x} =$ *surət və məxrəci eyni ifadəyə vurub-bölmə*

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *ortaq məxrəcə gətirmə*

$= \dfrac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} =$ *$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ düsturunun tətbiqi*

$= \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$ *sadələşdirmə*

Nümunə 4. $\sqrt{\dfrac{2}{\tan x}}$ ifadəsində məxrəci radikaldan azad edin.

Həlli: Burada $\tan x > 0$ olmalıdır.

$$\sqrt{\frac{2}{\tan x}} = \sqrt{\frac{2}{\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\tan x}} = \sqrt{\frac{2\tan x}{\tan^2 x}} = \frac{\sqrt{2\tan x}}{\tan x}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Mötərizədən azad etməklə sadələşdirin.

1) $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$
3) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$
2) $\tan x\,(\cos x + \cot x)(1 - \sin x)$
4) $(1 + \tan\alpha)^2 - \sec^2\alpha$

2. Vuruqlara ayırın:

1) $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x$
2) $\sin^4 x - \cos^4 x$
3) $\sin^3 x + 27$
4) $4\sin^2 y + 8\sin y + 4$
5) $3\cot^2\beta + 6\cot\beta + 3$
6) $2\cos^2 x + \cos x - 3$

3. Sadələşdirin.

1) $\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha + 1}$ 2) $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 3) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

4) $\dfrac{4\cos^3 x}{\sin^2 x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{4\cos x}\right)^2$ 5) $\dfrac{\sin^2\alpha - \sin\alpha - 2}{2\sin\alpha - 4}$ 6) $\dfrac{\sin^2\alpha - 9}{2\cos\alpha + 1}\cdot\dfrac{10\cos\alpha + 5}{3\sin\alpha + 9}$

4. İfadələri bir triqonometrik funksiya daxil olan vuruqların hasili (məsələn, $(\sin x - 3)(1 + 2\sin x)$) şəklində yazın.

1) $\cos^2 x + 2\cos x + 1$ 2) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$ 3) $\sin x - \cos^2 x - 1$

5. Məxrəci radikaldan azad edin.

a) $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\tan x}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\sin x}}$

6. Sadələşdirin.

a) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha$ b) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$

c) $\dfrac{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ d) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$

7. Eynilikləri isbat edin.

1) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$ 2) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + 1 = 2\cos^2\theta$

3) $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} + 1 = 2\sin^2\theta$ 4) $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta$

8. İfadənin ƏBQ və ƏKQ-ni tapın.

a) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$ b) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$ c) $\sin\alpha + \cos\alpha$

Göstəriş: $a\sin x + b\cos x$ ifadəsini $c\cdot\left(\dfrac{a}{c}\cdot\sin x + \dfrac{b}{c}\cdot\cos x\right)$ şəklində yazın və $\dfrac{a}{c} = \cos\varphi$, $\dfrac{b}{c} = \sin\varphi$ olmaqla köməkçi bucaq daxil edin. Burada $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nümunə. $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right) =$
$= 2(\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha + \sin 60^\circ\cdot\cos\alpha) = 2\sin(\alpha + 60^\circ)$, ƏBQ = 2, ƏKQ = –2.

9. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ olduqda $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$ ifadəsini sadələşdirin.

10. $\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin.

a) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ olduqda b) $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ olduqda

11. $\sin 18^\circ\cdot\cos 36^\circ$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1. Üçbucağın bucaqları 2; 3; 5 ədədləri ilə mütənasibdir. Üçbucağın bucaqlarının radian ölçülərini tapın.

2. İfadənin mənası varmı?

a) $\sqrt{\sin 170^\circ}$ b) $\sqrt{\cos 150^\circ}$ c) $\sqrt{\tan 200^\circ}$

3. $|\sin\alpha| = \sin\alpha$, $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ olarsa, α hansı rübün bucağıdır?

4. İsbat edin ki, $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot ... \cdot \tan 87^\circ \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ = 1$

5. $\sin 10^\circ = a$ olarsa, a ilə ifadə edin:

a) $\cos 80^\circ$ b) $\cos 100^\circ$ c) $\sin 170^\circ$ d) $\sin 190^\circ$

6. Kalkulyatordan istifadə etmədən hesablayın.

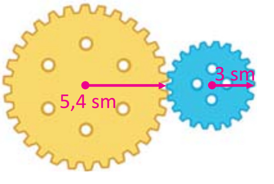
a) $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ b) $4\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}$

7. Hansı bərabərlik doğru, hansı yanlışdır?

a) $\sin 151^\circ = \sin 29^\circ$ b) $\cos 135^\circ = \sin 225^\circ$ c) $\tan 135^\circ = \tan 225^\circ$

d) $\sin 60^\circ = \cos 330^\circ$ e) $\sin 270^\circ = \cos 180^\circ$ f) $\cos(-60^\circ) = -\sin 330^\circ$

8. İki dişli çarxdan birinin radiusu 5,4 sm, digərininki isə 3 sm-dir. Əgər kiçik çarx 135° dönürsə, böyük çarx neçə dərəcə dönməlidir?



9. a) Suçiləyici ən çoxu 120° dönməklə 18 m məsafəyə su çiləyir. Sulana bilən hissəni sxematik olaraq təsvir edin və sahəsini hesablayın.
b) 18 m məsafəyə su vuran çiləyici ilə 400 m² sahəni sulamaq üçün çiləyici neçə dərəcə dönməlidir?

10. İsbat edin.

a) $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x - \cos x} = -\cot 2x$ b) $\dfrac{\sin 2x + \sin 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x$

c) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$ d) $\dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 4x} = \tan 3x$

11. $\alpha - \beta = 90^\circ$ olduqda $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

12. İsbat edin: a) $\cos(60^\circ - \alpha) = \sin(30^\circ + \alpha)$ b) $\cot(80^\circ - \alpha) = \tan(10^\circ + \alpha)$.

13. Göstərin ki: $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\cos 31^\circ + \sin 11^\circ} = \dfrac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$

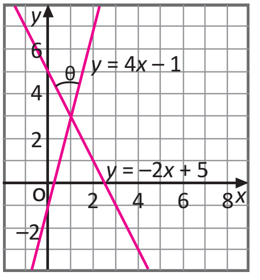
14. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}4$ olduqda $\left|\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}\right|$ ifadəsinin qiymətini tapın.

15. İfadənin qiymətini tapın.

a) $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ(\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)$

b) $\sin\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos^3\dfrac{\pi}{16} - \sin^3\dfrac{\pi}{16} \cdot \cos\dfrac{\pi}{16}$

16. $y = 4x - 1$ və $y = -2x + 5$ düz xətləri arasındakı iti bucağı tapın.



17. Hesablayın.

a) $\dfrac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ$

b) $8 \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$

18. Sadələşdirin: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) \cdot \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$

19. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ və $\sin\beta = -\dfrac{1}{2}$, $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ olduqda ifadələrin qiymətlərini tapın.

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\tan(\alpha + \beta)$

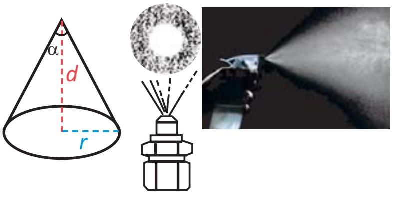
d) $\sin(\alpha - \beta)$ e) $\cos(\alpha - \beta)$ f) $\tan(\alpha - \beta)$

20. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{6 \cos 64^\circ}{\sqrt{3} \cos 34^\circ - \sin 34^\circ}$ b) $\dfrac{\cos 36^\circ + \sqrt{3} \sin 36^\circ}{4 \cos 24^\circ}$

21. a) Mayeçiləyici ilə α bucağı altında d məsafədə olan obyektə maye çiləyirsə, maye vurulan sahəni $S = \pi d^2 \tan^2\dfrac{\alpha}{2}$, həmçinin $S = \dfrac{\pi d^2(1 - \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha}$ düsturları ilə hesablamağın mümkün olduğunu göstərin.

b) Mayeçiləyici 30 sm məsafəyə 45° bucaq altında maye çiləyirsə, nə qədər sahəyə maye vurulmuş olar?



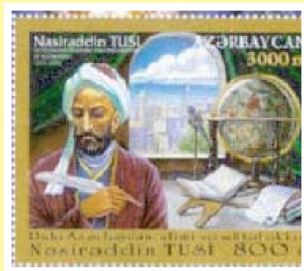
22. 1) Eynilikləri isbat edin. a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2 \tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$ b) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

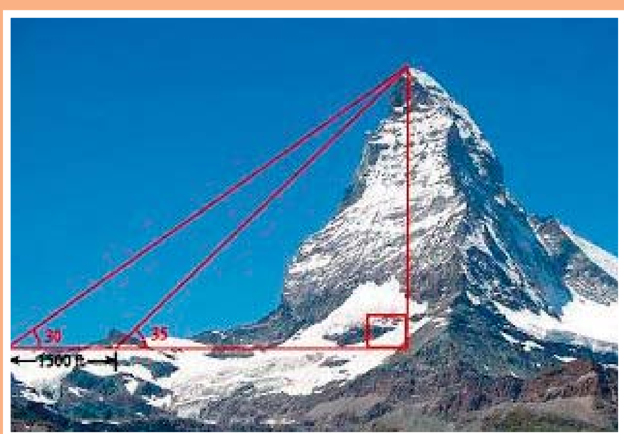
2) $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ olarsa, tapın: a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$

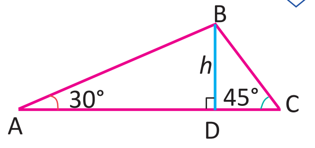
4 Sinuslar teoremi və kosinuslar teoremi

Sinuslar teoremi
Kosinuslar teoremi

XII əsrdə yaşamış dahi Azərbaycan alimi Nəsrəddin Tusi astronomiya, riyaziyyat, fəlsəfə elmlərinə böyük töhfələr vermişdir. Nəsrəddin Tusi ilk dəfə olaraq triqonometriyanı astronomiyadan ayırmış və sinuslar teoreminin isbatını vermişdir.







Praktik məşğələ

1) Şəkildə verilənlərə görə ΔABC-nin AB və BC tərəflərini *h* ilə ifadə edin.

2) $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{BC}{\sin\angle A}$ bərabərliyinin doğruluğunu yoxlayın.

3) AC tərəfinin uzunluğunu *h* ilə ifadə edin və $\angle B = 180° - (30° + 45°) = 105°$ olduğuna görə sin ∠B-ni hesablayın.

4) $\dfrac{AC}{\sin\angle B}$ nisbətini tapın və onu 2-ci bənddəki nisbətlərlə müqayisə edin.

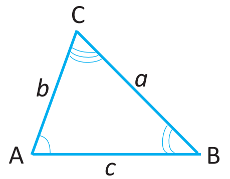
5) ΔABC-nin tərəfləri ilə qarşı bucaqların sinusları arasında hansı əlaqə vardır?

Sinuslar teoremi

ΔABC-də *a*, *b*, *c* uyğun olaraq, ∠A, ∠B, ∠C-nin qarşısında duran tərəflər olarsa,

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

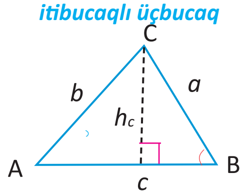
münasibəti doğrudur.



Üçbucağın tərəfləri qarşı bucaqlarının sinusları ilə mütənasibdir.

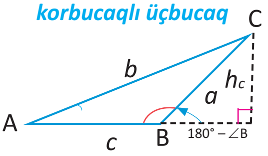
İsbatı: İsbatı itibucaqlı və korbucaqlı üçbucaq üçün yerinə yetirək.
Üçbucağın C təpəsindən AB tərəfinə h_c hündürlüyü çəksək, alınmış iki düzbucaqlı üçbucaqdan

itibucaqlı üçbucaq



$\dfrac{h_c}{b} = \sin\angle A$ və $\dfrac{h_c}{a} = \sin\angle B$ olduğunu yaza bilərik.

korbucaqlı üçbucaq



Korbucaqlı üçbucaqdan da

$\dfrac{h_c}{a} = \sin(180 - \angle B) = \sin\angle B$ olduğu görünür.

Bu nisbətlərdən h_c dəyişənini tapaq:

$h_c = b\sin\angle A$, $\qquad h_c = a\sin\angle B$

Buradan: $b \cdot \sin\angle A = a \cdot \sin\angle B$ və ya $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$

Analoji qayda ilə A təpəsindən BC tərəfinə hündürlük çəkməklə

$$\frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$$ olduğunu göstərmək olar.

Bərabərliyin xassəsinə görə yaza bilərik:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

✓ *Bu nisbətlərin üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə bərabər olduğuna diqqət edin.*

Teorem isbat olundu.

Düzbucaqlı üçbucaq üçün teoremin doğruluğunu özünüz göstərin.

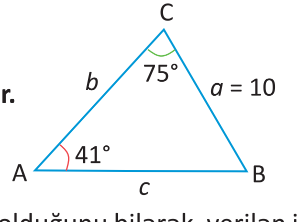
Nəticə 1. Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısında duran tərəflərin uzunluqları bərabərdir.

Nəticə 2. Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf və böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur.

Doğrudan da, əgər α və β bucaqları itidirsə, $\alpha > \beta$ olduqda $\sin\alpha > \sin\beta$ olur. $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ olduğundan, $a > b$ alınır. Əgər α kor bucaqdırsa, onda $(180° - \alpha)$ iti bucaqdır, həm də $(180° - \alpha)$ bucağı üçbucağın β bucağına qonşu olmayan xarici bucağı olduğundan β-dan böyükdür.

Ona görə $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. Buradan da $a > b$ alınır.

Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi verildikdə, iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verildikdə sinuslar teoremini tətbiq edərək qalan tərəfləri və bucaqları tapmaq mümkündür.



I hal. Üçbucağın iki bucağı və bir tərəfi (BBT) verilir.

Nümunə 1. ΔABC-də $a = 10$, $\angle A = 41°$, $\angle C = 75°$

Həlli: Üçbucağın daxili bucaqlarınınn cəminin 180° olduğunu bilərək, verilən iki bucağına görə üçüncü bucağını, sinuslar teoreminə görə isə verilməyən iki tərəfini tapa bilərik.

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - (41° + 75°) = 64°$$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} \Rightarrow b = \frac{a\cdot\sin\angle B}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 64°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}899}{0{,}656} \approx 13{,}7$$

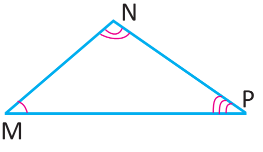
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C} \Rightarrow c = \frac{a\cdot\sin\angle C}{\sin\angle A} \Rightarrow \frac{10\sin 75°}{\sin 41°} \approx \frac{10\cdot 0{,}966}{0{,}656} \approx 14{,}7$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Dəyişəni tapın.

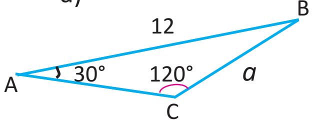
a) $\dfrac{b}{\sin 45°} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 30°}$ b) $\dfrac{a}{\sin 35°} = \dfrac{10}{\sin 40°}$

2. Δ MNP üçün sinuslar teoremini yazın.

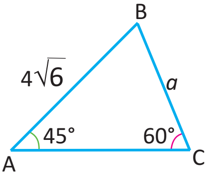


3. Şəkildə verilənlərə görə dəyişənlə işarə edilmiş tərəfi tapın.

a)

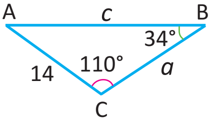


b)

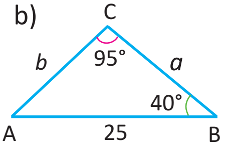


4. Verilməyən tərəfləri və bucaqları tapın.

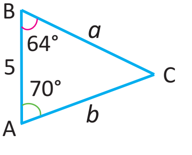
a)



b)



c)



5. $\dfrac{x}{\sin 60°} = \dfrac{10}{\sin 80°}$ bərabərliyindən x-in qiymətini tapın, uyğun üçbucağı çəkin.

6. Verilənlərə görə Δ ABC-ni çəkin və tələb olunan tərəfi tapın.

a) **Verilir:** Δ ABC, ∠A = 57°,
∠B = 73°, AB = 24 cm.
AC = ?

b) **Verilir:** ΔABC, ∠B = 38°,
∠C = 56°, BC = 63 cm
AB = ?

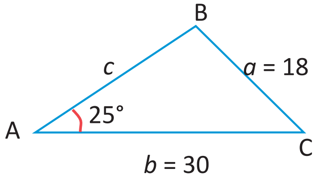
c) **Verilir:** Δ ABC, ∠A = 50°,
∠B = 50°, AC = 27 m.
AB = ?

d) **Verilir:** Δ ABC, ∠A = 23°,
∠C = 78°, AB = 15 cm,
BC = ?

II hal. Üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq (TTB) verilir.

Nümunə 2. 1) ΔABC-də $a = 18$, $\angle A = 25°$, $b = 30$

Həlli: $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B}$



$$\sin\angle B = \frac{b\cdot\sin\angle A}{a} = \frac{30\cdot\sin 25°}{18} \approx 0{,}7044$$

0,7044 ədədini kalkulyatora daxil edib $\boxed{\sin^{-1}}$ düyməsini işarələsək, B bucağının təqribən 44,8° olduğunu görərik: $\angle B \approx 44{,}8°$
Lakin $\sin\angle B = \sin(180° - \angle B)$ olduğundan, burada B bucağının ikinci bir qiyməti də var: $\angle B \approx 180° - 44{,}8° = 135{,}2°$

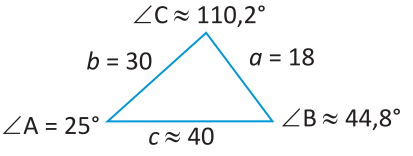
$\boxed{\angle B \approx 44{,}8°}$ olduqda

$\angle C \approx 180° - (25° + 44{,}8°) = 110{,}2°$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

$$c \approx \frac{18\sin 110{,}2°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 40$$



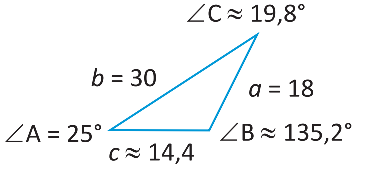
$\boxed{\angle B \approx 135{,}2°}$ olduqda

$\angle C \approx 180° - (25° + 135{,}2°) = 19{,}8°$

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

$$c = \frac{a\sin\angle C}{\sin\angle A}$$

$$c \approx \frac{18\sin 19{,}8°}{\sin 25°} \approx \frac{18\cdot 0{,}938}{0{,}423} \approx 14{,}4$$



Deməli, verilən qiymətlərə uyğun iki üçbucaq var.

1. $\angle B \approx 44{,}8°$, $\angle C \approx 110{,}2°$, $c \approx 40$ 2. $\angle B \approx 135{,}2°$, $\angle C \approx 19{,}8°$, $c \approx 14{,}4$

II hal üçün aşağıdakı vəziyyəti də nəzərdən keçirək.

Nümunə 3. 30°-li bucaq qarşısındakı tərəfi 5, digər tərəflərindən birinin uzunluğu 12 olan üçbucaq qurmaq olarmı?

Həlli:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}, \quad \sin\angle B = \frac{b\cdot\sin\angle A}{a} = \frac{12\cdot\sin 30°}{5} = 1{,}2 \text{ alarıq.}$$

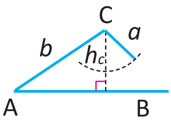
İstənilən bucaq üçün $\sin\angle B \le 1$ olduğundan, $\sin\angle B$ -nın qiyməti $1{,}2$ ola bilməz.
Deməli, belə bir üçbucaq qurmaq mümkün deyil.

Üçbucağın iki tərəfi və bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq verildikdə mümkün həllərin sayı bu tərəflərin uzunluğunun ədədi qiymətindən və bucağın növündən (dərəcə ölçüsündən) asılı olaraq dəyişir.

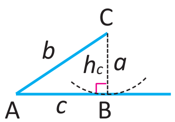
TTB halı üçün mümkün hallər

$\angle A < 90°$

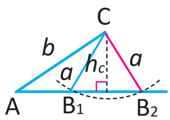
1. $a < h_c < b$ həlli yoxdur



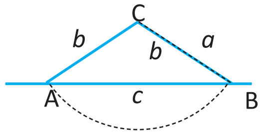
2. $a = h_c < b$ bir həlli var



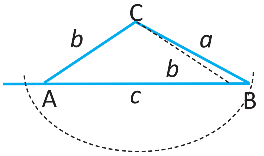
3. $h_c < a < b$ iki həlli var



4. $a = b$ bir həlli var

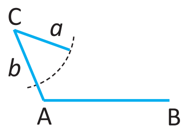


5. $a > b$ bir həlli var

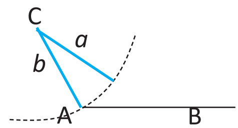


$\angle A \geq 90°$

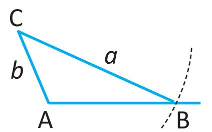
a) $a < b$ həlli yoxdur



b) $a = b$ həlli yoxdur



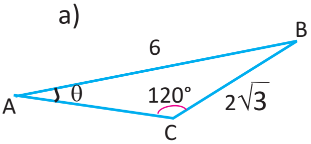
c) $a > b$ bir həlli var



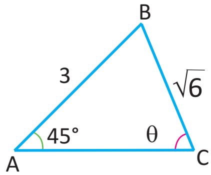
Öyrənmə tapşırıqları

7. Şəkildə verilənlərə görə θ bucağının dərəcə ölçüsünü tapın. Hər bir halda məsələnin neçə həlli olduğunu araşdırın.

a)



b)



8. Verilənlərə görə hansı halda bir, hansı halda iki üçbucaq qurmaq mümkündür, hansı halda məsələnin həlli yoxdur? Hesablamalarla göstərin.

a) $a = 10$, $\angle A = 35°$, $\angle B = 25°$

b) $b = 40$, $\angle B = 50°$, $c = 50$

c) $\angle A = 40°$, $\angle B = 45°$, $c = 15$

d) $a = 4$, $\angle A = 42°$, $b = 7$

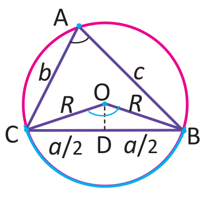
9. a) ΔABC-də $AC = 7$ sm, $AB = 11$ cm, $\angle B = 25°$-dir. $\angle C$-ni tapın.

b) ΔKLM-də $LM = 16{,}8$ sm, $KM = 13{,}5$ sm, $\angle K = 56°$ olduğuna görə $\angle L$-i tapın. Hər iki məsələdə axtarılan bucağa "bir iti", "bir kor bucaq" olmaqla iki bucaq uyğundur fikri doğrudurmu?

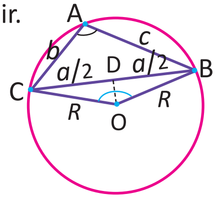
10. Üçbucağın tərəflərindən birinin uzunluğu 43 m, digərininki isə 11 m-dir. Bu tərəflərdən birinin qarşısındakı bucaq 35°-dir. Üçbucağın verilməyən tərəfini və bucaqlarını tapın.

11. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucaqdan istifadə etməklə sinuslar teoremini isbat edin.

1. Çevrənin mərkəzi üçbucağın daxilindədir.



2. Çevrənin mərkəzi üçbucağın xaricindədir.



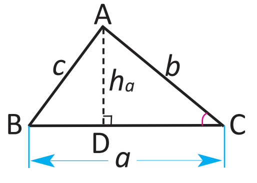
İsbat üçün plan: Əvvəlcə $\dfrac{a}{\sin\angle A} = 2R$ olduğunu və oxşar qayda ilə $\dfrac{b}{\sin\angle B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin\angle C} = 2R$ olduğunu göstərin.

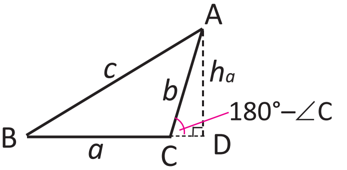
12. Bucaqları daha dəqiq ölçmək üçün dərəcə ölçü vahidi ilə yanaşı daha kiçik vahidlərdən- dəqiqə (′) və saniyədən (″) də istifadə edilir. $1° = 60'$, $1' = 60''$ olduğunu nəzərə almaqla bucaqların ölçülərini dərəcə ilə onluq kəsr şəklində ifadə edin.

a) $20°15'36''$ b) $45°12'18''$ c) $34°20'54''$

Üçbucağın sahə düsturları:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\angle C \qquad S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\angle A \qquad S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\angle B$$

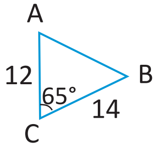


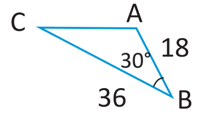


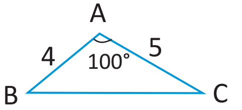
13. Verilənlərə görə üçbucaqların sahələrini tapın.

1) $\angle B = 42°$, $a = 6$ m, $c = 8$ m
2) $\angle A = 17°\,12'$, $b = 10$ sm, $c = 13$ sm
3) $\angle C = 82°\,54'$, $a = 4$ dm, $b = 6$ dm
4) $\angle C = 75{,}16°$, $a = 1{,}5$ m, $b = 2{,}1$ m

14. Verilənlərə görə üçbucaqların sahələrini tapın.

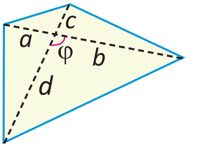
a) 

b) 

c) 

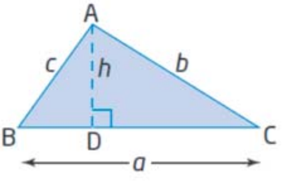
15. a) Tərəfləri 5 m, 6 m, 7 m olan üçbucağın böyük hündürlüyünü tapın.
b) Tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın kiçik hündürlüyünü tapın.

16. İsbat edin ki, qabarıq dördbucaqlının sahəsi diaqonalların və onlar arasındakı bucağın sinusu hasilinin yarısına bərabərdir. $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$



17. a) Paraleloqramın diaqonalları 10 sm və 12 sm olub, aralarındakı bucaq 60°- dir. Bu paraleloqramın sahəsini tapın.
b) Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalları $12\sqrt{2}$ sm olub, aralarındakı bucaq 45°-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

18 Sinuslar teoreminin ikisütunlu cədvəllə isbatını ΔABC-yə görə dəftərinizdə tamamlayın.

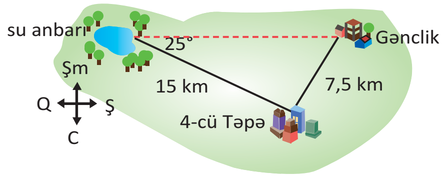


Təklif	Əsası
$\frac{1}{2} bc \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\angle C$	
$bc \cdot \sin\angle A = ac \cdot \sin\angle B = ab \cdot \sin\angle C$	
$\frac{bc \cdot \sin\angle A}{abc} = \frac{ac \cdot \sin\angle B}{abc} = \frac{ab \cdot \sin\angle C}{abc}$	
$\frac{\sin\angle A}{a} = \frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle C}{c}$	
$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$	

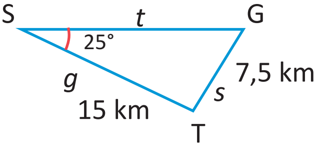
19. Hər bir mümkün hala uyğun bir üçbucaq çəkin.
a) ΔABC də $\angle A = 30°$, AB = 50 sm olduqda məsələnin iki həlli olması üçün BC tərəfinin uzunluğu (santimetrlə) hansı intervalda dəyişməlidir?
b) $\angle A = 60°$ və AB = $12\sqrt{3}$ sm-dir. BC tərəfinin uzunluğu (santimetrlə) hansı intervalda dəyişsə, üçbucaq qurmaq mümkün olmaz?
c) $\angle A = 45°$ və AB = $18\sqrt{2}$ sm olarsa, BC tərəfinin uzunluğunun (santimetrlə) hansı qiymətlərində yalnız bir üçbucağın həlli mümkündür?

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. Su anbarı 4-cü Təpə yaşayış məntəqəsindən 25° şimal-qərb istiqamətində 15 km, Gənclik yaşayış məntəqəsi su anbarından şərqdə olmaqla 4-cü Təpə yaşayış məntəqəsindən şimal şərq istiqamətində 7,5 km məsafədə yerləşir. Gənclik yaşayış məntəqəsi su anbarından neçə kilometr məsafədədir?



Həlli: Plana uyğun üçbucağı yenidən çəkək və təpələrini obyektlərin adına uyğun olaraq Su anbarı – S, 4-cü Təpə – T, Gənclik – G hərfləri ilə işarələyək. Məsafələr isə uyğun olaraq *s*, *t* və *g* kimi olsun.



Sinuslar teoreminə görə:

$$\frac{s}{\sin\angle S} = \frac{g}{\sin\angle G}, \quad \frac{7{,}5}{\sin 25°} = \frac{15}{\sin\angle G}$$

$$\sin\angle G = \frac{15\cdot \sin 25°}{7{,}5} \approx \frac{15\cdot 0{,}4226}{7{,}5} = 0{,}8452$$

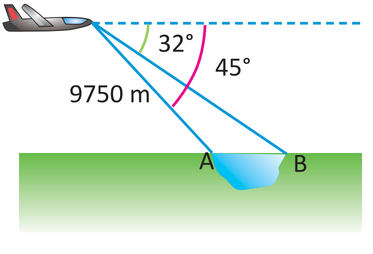
$$\angle G \approx 58° \qquad \angle T \approx 180° - 25° - 58° \approx 97°$$

$$\frac{s}{\sin\angle S} = \frac{t}{\sin\angle T}, \quad \frac{7{,}5}{\sin 25°} \approx \frac{t}{\sin 97°}$$

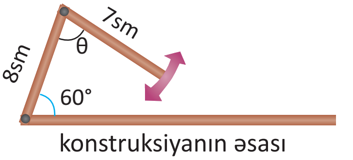
$$t \approx \frac{7{,}5\cdot \sin 97°}{\sin 25°} \approx \frac{7{,}5\cdot 0{,}9925}{0{,}4226} \approx 17{,}6 \text{ km}$$

Cavab: Təxminən 17,6 km məsafədə yerləşir.

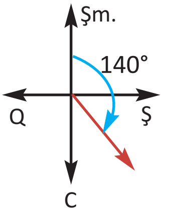
20. Müşahidə aparılan təyyarədən gölün iki müxtəlif sahilindəki A və B nöqtələrinə eniş bucağı uyğun olaraq, 45° və 32°-dir. Şəkildə verilənlərə görə gölün bu iki nöqtə arasındakı eni təqribən neçə metrdir?

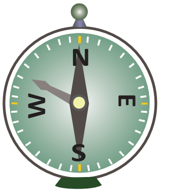


21. Uzunluğu 8 sm olan taxta çubuq konstruksiyanın əsasına 60° bucaq əmələ gətirməklə yapışdırılmışdır. Uzunluğu 7 sm olan çubuq bu çubuğun digər ucuna və konstruksiyanın oturacağına bərkidilməlidir. Bunun üçün şəkildə göstərilən θ bucağının mümkün dərəcə ölçüsünü tapın.

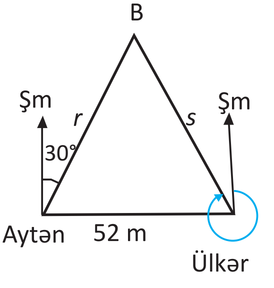


22. **Naviqasiya** dəniz və hava yollarında nəqliyyatın yerini və hərəkət kursunu müəyyənetmə işlərini əhatə edir.
Naviqasiyada istiqamət adətən, azimuta görə müəyyən edilir. Azimut saat əqrəbinin hərəkəti üzrə olmaqla şimal istiqamət ilə verilən istiqamət arasında qalan bucaqdır.
Məsələn, şəkildə 140° azimut təsvir edilmişdir.

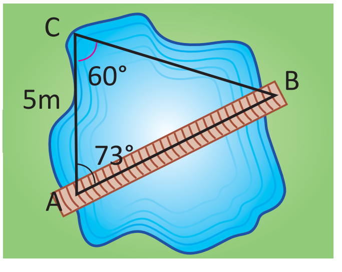




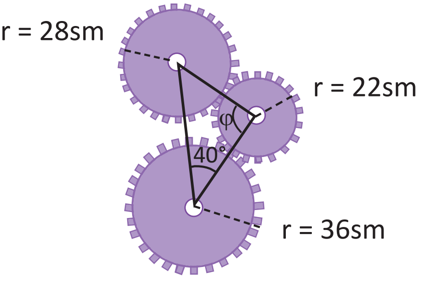
Ülkərgilin mindiyi yelkənli qayıq Aytəngilin mindiyi qayıqdan şərq istiqamətində 52 m aralıdadır. Aytəngil dənizdəki canlılar üzərində müşahidə aparan tədqiqat stansiyasını 30° azimutla, Ülkərgil isə 320° azimutla görürlər. Ülkərgil stansiyadan təqribən neçə metr aralıdadır?



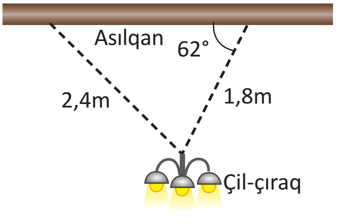
23. **Körpü inşaatı.** Şəkildə verilənlərə görə quraşdırılmalı olan körpünün uzunluğu neçə metr olmalıdır?



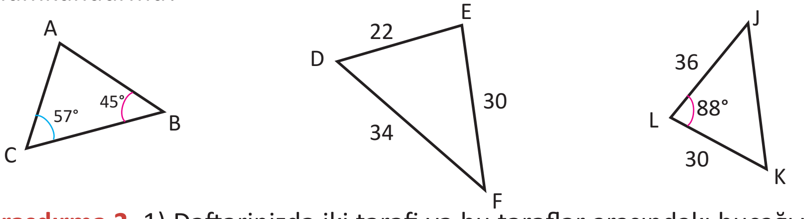
24. **Konstruksiya.** Şəkildə verilən dişli çarx konstruksiyasına görə φ bucağını tapın.



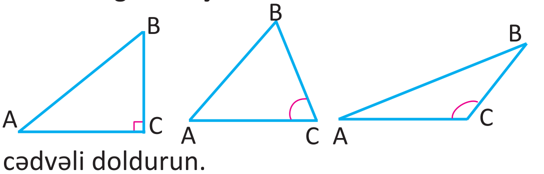
25. Çilçıraq taxta asılqana uzunluğu 1,8 m və 2,4 m olan zəncirlərlə bərkidilmişdir. 1,8 m uzunluğundakı zəncir asılqanla 62° bucaq əmələ gətirir. Digər zəncirin asılqanla əmələ gətirdiyi bucağı tapın.



Araşdırma 1. Verilən ölçülərə görə hər üçbucaq üçün tapşırıqları yerinə yetirin:
1) Üçbucaqların bucaqlarını artan sıra ilə yazın.
2) Verilməyən tərəfi və ya bucağı sinuslar teoremini tətbiq etməklə tapmaq mümkündürmü?



Araşdırma 2. 1) Dəftərinizdə iki tərəfi və bu tərəflər arasındakı bucağı verilmiş üçbucaqlar çəkin və üçüncü tərəfin uzunluğunu ölçün.
1. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 90°$
2. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 60°$
3. $a = 3$ sm, $b = 4$ sm, $\angle C = 120°$



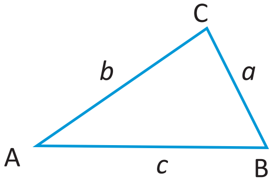
2) Bu üçbucaqlar üçün aşağıdakı cədvəli doldurun.

Üçbucağın tərəfləri (sm-lə)	c^2	$a^2 + b^2$	$2ab\cos\angle C$
$a = 3$, $b = 4$, $c = 5$			
$a = 3$, $b = 4$, $c =$ ■			
$a = 3$, $b = 4$, $c =$ ■			

3) $a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$ və c^2 ifadələrinin qiymətlərini müqayisə edin.

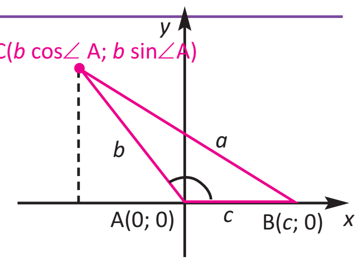
Kosinuslar teoremi

Tərəfləri a, b və c olan istənilən ABC üçbucağında
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A}$
$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B}$
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C}$ düsturları doğrudur.



Üçbucağın hər hansı tərəfinin kvadratı bərabərdir: qalan iki tərəfin kvadratları cəmi, minus bu tərəflərlə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinin iki misli.

İsbatı: ABC üçbucağını koordinat sistemində şəkildə göstərildiyi kimi, A təpəsi koordinat başlanğıcında olmaqla yerləşdirək. Bu halda təpə nöqtələrinin koordinatları:
A(0; 0), B(c; 0), C($b\cdot\cos\angle A$; $b\cdot\sin\angle A$) kimi olacaq. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə yaza bilərik:



$$a^2 = (c - b\cos\angle A)^2 + (b\sin\angle A - 0)^2 =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2\cos^2\angle A + b^2\sin^2\angle A =$$
$$= c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A + b^2(\cos^2\angle A + \sin^2\angle A) = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\angle A$$

Beləliklə, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$ olduğu isbat edildi.
Üçbucağın digər tərəfləri üçün olan düsturların da doğruluğunu üçbucağın digər təpə nöqtələrini (B və C) koordinat başlanğıcında yerləşdirməklə isbat etmək olar.
Qeyd: Tutaq ki, $\angle C = 90°$. $\cos 90° = 0$ olduğundan $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$ düsturundan $c^2 = a^2 + b^2$ alınır. Bu isə Pifaqor teoremini ifadə edir. Ona görə də kosinuslar teoreminə bəzən Pifaqor teoreminin ümumiləşməsi də deyilir.

İki tərəfi və onlar arasında qalan bucağına görə üçbucağın həlli

Nümunə 1. ΔABC-də $a = 12$ sm, $c = 16$ sm, $\angle B = 38°$ olduğuna görə üçbucağı həll edin.

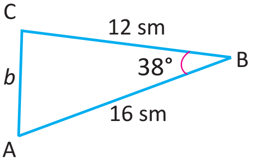
Həlli:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$ ***kosinuslar teoremi***

$b^2 = 144 + 256 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos 38°$ ***a, c və ∠B-nin qiymətləri yerinə yazılır***

$b^2 \approx 400 - 384 \cdot 0{,}788 \approx 97{,}4$ ***sadələşdirilir***

$b \approx \sqrt{97{,}4} \approx 9{,}87$ (sm) ***kvadrat kök alınır***



Üçbucağın üç tərəfi və bir bucağı məlum olduğundan sinuslar teoremini tətbiq etmək olar. A bucağını tapaq. Verilənlərə görə a tərəfi c tərəfindən kiçik olduğundan onun qarşısında duran bucaq da kiçik olacaq, yəni $\angle A$ kor bucaq ola bilməz.

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} \qquad \frac{12}{\sin \angle A} = \frac{9{,}87}{\sin 38°} \qquad \sin \angle A = \frac{12 \sin 38°}{9{,}87} \approx 0{,}7485$$

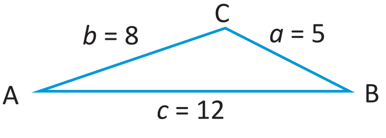
Kalkulyatorda $\sin^{-1}$ düyməsi ilə və 0,7485 ədədini daxil etməklə, $\angle A = \sin^{-1}(0{,}7485) \approx 48{,}5°$ olduğunu hesablamaq olar. Artıq ABC üçbucağının üç tərəfi və iki bucağı məlumdur. Üçüncü bucağı isə üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi düsturundan tapa bilərik:

$$180° - (38° + 48{,}5°) = 93{,}5° \quad \angle C \approx 93{,}5°$$

$a = 12$ sm, $b \approx 9{,}87$ sm, $c = 16$ sm, $\angle A \approx 48{,}5°$, $\angle B = 38°$, $\angle C \approx 93{,}5°$

Üç tərəfinə görə üçbucağın həlli

Nümunə 2. ΔABC-də $a = 5$ sm, $b = 8$ sm, $c = 12$ sm-dir. Üçbucağı həll edin.



Həlli: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$

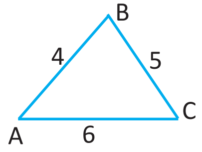
$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos \angle A = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 12} = \frac{183}{192} \approx 0{,}9531$$

$\angle A \approx \cos^{-1}(0{,}9531) \approx 18°$

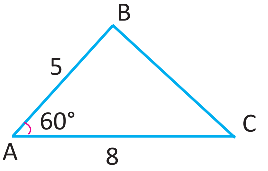
Oxşar qayda ilə üçbucağın B və C təpə bucaqları da tapılır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Üçbucağın üç tərəfinə görə bucaqlarının dərəcə ölçüsünü tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



2. Üçbucağın iki tərəfinə və onlar arasında qalan bucağına görə verilməyən tərəfini və bucaqlarını tapın.



3. Verilənlərə görə tələb olunanı tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

1) Verilir: ΔABC-də
$a = 27$, $b = 22$
$\angle C = 40°$,
Tapın: c tərəfini.

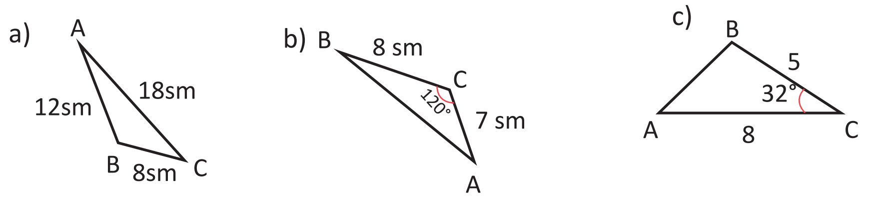
2) Verilir: ΔABC,
$a = 18$, $c = 15$
$\angle B = 110°$.
Tapın: b tərəfini.

3) Verilir: ΔABC,
$a = 9$, $b = 10$, $c = 11$.
Tapın: $\angle A$

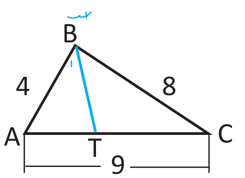
4) Verilir: Δ ABC,
$a = 120$, $b = 90$, $c = 105$.
Tapın: Üçbucağın ən böyük bucağını tapın.

5) Verilir: Δ ABC,
$a = 16$, $b = 21$, $c = 19$.
Tapın: Üçbucağın ən kiçik bucağını tapın.

4. Verilənlərə görə üçbucaqları həll edin. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

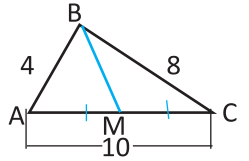


5. a) ΔABC-də BT tənböləndir. AB = 4, BC = 8, AC = 9 olarsa, BT tənböləninin uzunluğunu verilən addımları yerinə yetirməklə tapın.



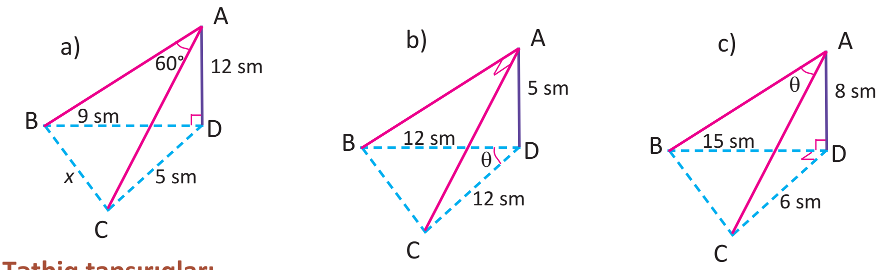
1. AT və TC parçalarının uzunluğunu tapın.
2. ΔABC-dən cos∠A-nı tapın.
3. ΔABT-dən BT-ni tapın.

b) ΔABC-də BM mediandır. AB = 4, BC = 8, AC = 10 olarsa, BM medianının uzunluğunu tapın.



6. a) Tərəfləri 6 sm, 8 sm, iti bucağı 60° olan paraleloqramın diaqonallarını tapın.
b) Tərəfləri a, b, diaqonalları d_1 və d_2 olan paraleloqram üçün
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ olduğunu isbat edin.

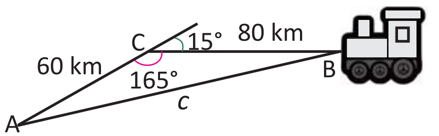
7. AD parçası ΔBCD müstəvisinə perpendikulyadır. Verilənlərə görə məchulu tapın.



Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. A məntəqəsindən hərəkətə başlayan qatar 60 km gedib C məntəqəsinə çatdıqdan sonra, hərəkət istiqamətini 15° dəyişərək, daha 80 km qət etdi. Qatar A məntəqəsindən neçə kilometr aralanmışdır?

Həlli: Məsələnin şərtinə uyğun şəkil çəkək.

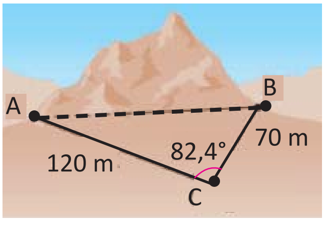


Şəkildən görünür ki, üçbucağın iki tərəfi və onlar arasında qalan bucağı məlumdur. Kosinuslar teoremini tətbiq etməklə c tərəfini tapa bilərik:

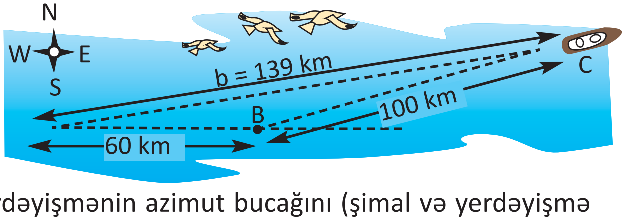
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$

$c^2 = 80^2 + 60^2 - 2\cdot 80\cdot 60\cos 165° \approx 19273; \quad c \approx 139$ km

8. Dağın A və B nöqtələri arasındakı hissəsində tunel tikintisi planlaşdırılır. Şəkildə verilənlərə görə tunelin uzunluğunun neçə metr olduğunu müəyyən edin.

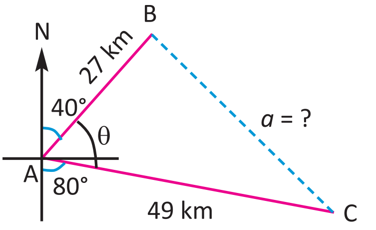


9. Gəmi 60 km şərqə hərəkət etdikdən sonra istiqamətini şəkildə göstərildiyi kimi şimala doğru dəyişərək daha 100 km yol qət etdi.

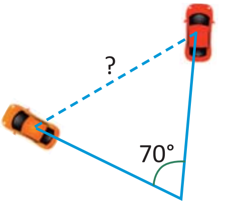


Şəkildə verilənlərə görə yerdəyişmənin azimut bucağını (şimal və yerdəyişmə istiqamətlərinin saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində əmələ gətirdiyi bucaq) müəyyən edin.

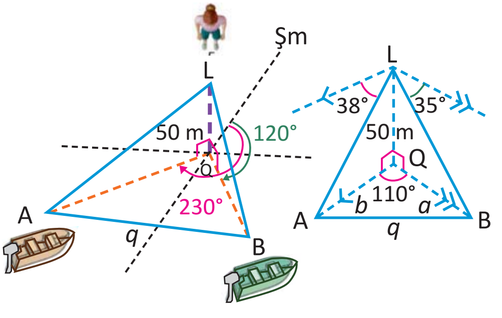
10. A məntəqəsindən hərəkətə başlayan iki gəmidən biri B, digəri isə C məntəqəsinə yetişdi. Bu hərəkətləri təsvir edən şəkildən istifadə edərək:
a) Gəmilərin hərəkət istiqamətləri arasındakı bucağı tapın;
b) B və C məntəqələri arasındakı məsafəni tapın.



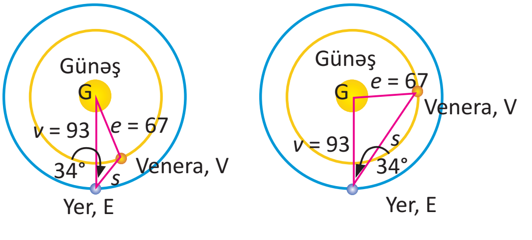
11. Binanın həyətindən eyni vaxtda hərəkətə başlayan iki avtomobilin hərəkət istiqamətləri 70° bucaq əmələ gətirir. Onlardan biri orta sürəti 40 km/saat, digəri isə 60 km/saat olmaqla hərəkət edir. Avtomobillər 45 dəqiqədən sonra iş yerlərinə çatdılar. Bu iki iş yeri arasındakı məsafə təqribən neçə kilometrdir?



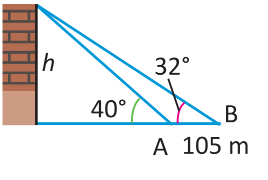
12. Leyla körpünün üzərində dayanaraq, 50 m hündürlükdən çayda hərəkət edən qayıqları müşahidə edir. A qayığı 230°, B qayığı isə 120° azimutla hərəkət edir. Leyla A qayığını 38°, B qayığını isə 35° eniş bucağı ilə müşahidə etdiyini təxmin edir. Bu məlumatlara görə qayıqlar arasındakı məsafəni tapın.



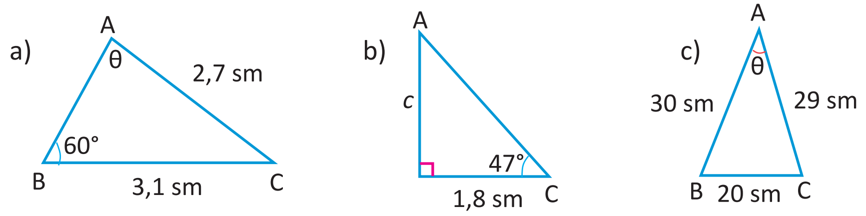
13. **Astronomiya.** İlin müəyyən vaxtlarında səhərlər Venera planetini göy üzündə görmək mümkündür.
Venera planeti ilə Günəş arasındakı məsafə təqribən 67 milyon mil, Yer planeti ilə Günəş arasındakı məsafə 93 milyon mildir. Günəş ilə Venera 34° bucaq əmələ gətirməklə görünürsə, Yer planeti ilə Venera planeti arasındakı məsafənin təqribən 35 milyon mil və ya 119 milyon mil olduğunu göstərin.



14. Bir-birindən 105 m məsafədə olan A və B nöqtələrindən h hündürlüklü obyekt yüksəklik bucağı uyğun olaraq, 40° və 32° olmaqla müşahidə edilir. Obyektin hündürlüyü neçə metrdir?

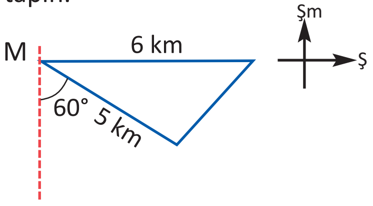


1. Şəkildə verilənlərə görə dəyişənlə işarələnmiş bucağı və ya tərəfi tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

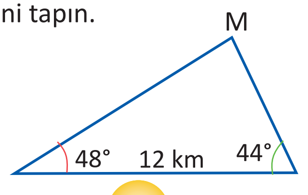


2. İki xizəkçinin M nöqtəsindən başlanan hərəkəti haqqında məlumatı əks etdirən şəkillərə görə məsələləri həll edin.

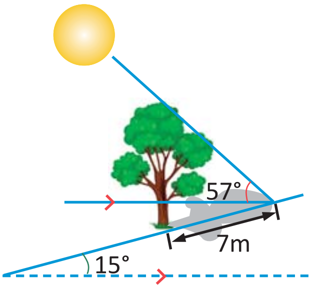
a) Xizəkçilər arasındakı məsafəni tapın.



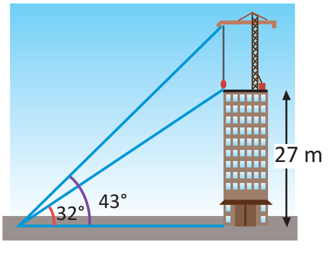
b) Hər bir xizəkçinin qət etdiyi məsafəni tapın.



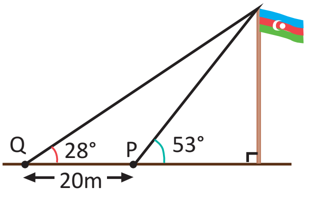
3. Yoxuşda bitən ağacın hündürlüyünü müəyyən edin. Yoxuş üfüqlə 15°-li bucaq, Günəş şüaları üfüqi xətlə 57°-li bucaq əmələ gətirir, Ağacın kölgəsinin uzunluğu 7 m-dir.



4. a) Binanın tikintisində istifadə edilən kranın ən yüksək nöqtəsi ilə binanın ən yüksək nöqtəsinin yerdəki müşahidəçinin ölçmələrinə görə yüksəliş bucaqları uyğun olaraq 43° və 32°-dir. Binanın hündürlüyü 27 m-dir. Kranın ən hündür nöqtəsi ilə müşahidəçi arasındakı məsafə neçə metrdir?

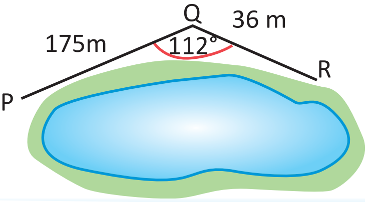


b) Eldar parkdakı bayrağın hündürlüyünü müəyyən etmək istəyir. O, əvvəlcə Q, sonra isə P nöqtəsindən yüksəliş bucağını ölçdü. Bu iki nöqtə arasındakı məsafənin 20 m olduğunu bilərək bayrağın hündürlüyünü hesabladı. $\angle Q = 28°$, $\angle P = 53°$ olarsa, bayrağın hündürlüyünü siz də hesablayın.

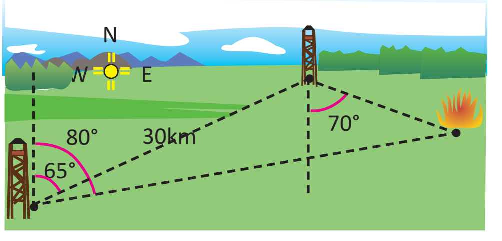


5. Əhməd və Rəşad eyni nöqtədən bir-biri ilə 120° bucaq əmələ gətirən istiqamətlərdə qaçmağa başladılar. Əhməd saatda 8 km sürətlə, Rəşad isə 7 km sürətlə qaçırdı. 30 dəqiqədən sonra onlar arasındakı məsafə nə qədər olacaq? Məsələni uyğun şəkil çəkməklə həll edin.

6. İbrahim P nöqtəsindən R nöqtəsinə getmək üçün əvvəlcə Q nöqtəsinə, oradan isə R nöqtəsinə getməli oldu. Şəkildə verilənlərə görə P və R nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.



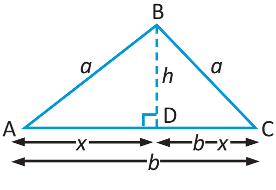
7. Şəkildə verilənə görə yangın yerindən hər bir stansiyaya qədər məsafəni tapın.

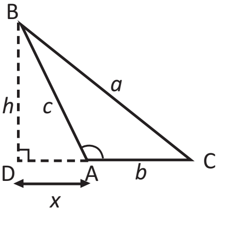


8. Kosinuslar teoremini şəkildə verilmiş üçbucaqlardan istifadə etməklə isbat edin.

İsbat üçün plan. 1) Üçbucağın hündürlüyünün iki düzbucaqlı üçbucağa (ΔADB və ΔBDC) görə müxtəlif ifadələrini və onların bərabərliyini yazın.

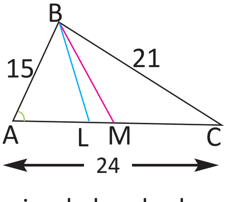
2) Pifaqor teoremindən və $\cos(180 - \angle A) = -\cos\angle A$ eyniliyindən istifadə edin.





9. Paraleloqramın tərəfləri 10 sm və 12 sm-dir. Kiçik diaqonalın 15 sm olduğunu bilərək paraleloqramın iti bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

10. Verilir: ΔABC, AB=15, BC=21, AC=24
BM-median, BL-tənbölən.
Tapın:
1) $\angle A$ 2) AM və BM 3) AL və BL



11. Polis helikopteri 400 m yüksəklikdə uçur. Polis məmuru şimala baxdıqda 20° eniş bucağı ilə qəza törədən avtomobili, cənuba baxdıqda isə 15° eniş bucağı ilə hadisə yerinə gələn təcili yardım maşınını görür.
a) Təcili yardım maşını hadisə yerindən neçə kilometr aralıdadır?
b) Təcili yardım maşınının sürəti saatda 100 km olarsa, neçə dəqiqədən sonra hadisə yerinə çatar?

12. İtibucaqlı üçbucağın həllinə aid real həyati situasiyanı əks etdirən bir məsələ qurun. Məsələnizi ümumsinif müzakirəsinə təqdim edin.

5 Triqonometrik funksiyalar və onların qrafikləri

Dövri funksiyalar

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafikləri

$y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinin çevrilmələri

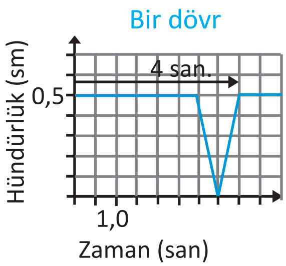
Triqonometrik funksiyalar və dövri hadisələr

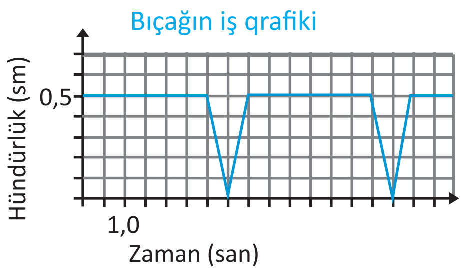
$y = \tan x$ və $y = \cot x$ funksiyalarının qrafikləri

Dövri funksiyalar

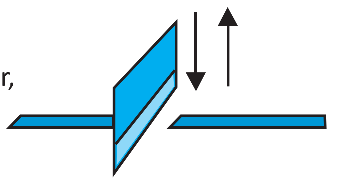
Təbiətdə bir çox hadisələr – günəşin doğması və batması, mövsümi olaraq temperaturun dəyişməsi, okeanda dalğaların qabarması və çəkilməsi və s. kimi təbiət hadisələri demək olar ki, dövri olaraq təkrarlanır. Həmçinin istehsal avandlıqlarının, konveyerlərinin işi, avtomobil hissələrinin hərəkəti dövri olaraq təkrarlanır. Dövri dəyişməni aşağıdakı sadə istehsal nümunəsi üzərində araşdıraq.

Metr - lent kəsən cihazın işi. Kəsici qurğu uzunluğu 3 m olan nazik ölçü lentlərini kəsir və lentlər yuvarlanmaqla satış üçün hazırlanır. Cihazın işini göstərən qrafik və izahedici yazı aşağıdakı kimidir.





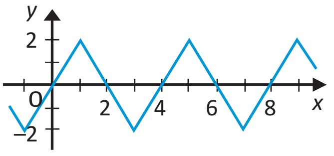
1. Bıçaq ən çoxu 0,5 sm hündürlüyə qalxır.
2. Bıçaq 3 saniyə dayanır, 0-3, 4 -7 saniyələrdə və s.
3. 3-cü saniyədən 3,5 saniyəyə qədər bıcaq aşağı enir, lenti kəsir. 3,5 – 4-cü saniyədə bıcaq yuxarı qalxır.
4. Bir tam dövrə 4 saniyə sərf edilir.



Sizcə bıçaq növbəti dəfə neçənci saniyədə lenti kəsəcək?
Ölçmə lentini kəsən cihazın işi dövri olaraq təkrarlanır. Bir dövr 4 saniyə davam edir. Cihazın bıçağının səthdən hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən qrafik də bir dövrə uyğun qrafikin təkrarlanması ilə çəkilmişdir. Növbəti dəfə bıçaq 11,5-ci saniyədə lenti kəsəcək.
Dövri təkrarlanan prosesləri riyazi olaraq dövri funksiyalarla modelləşdirmək olar. Dövri funksiyaların qiymətləri müəyyən intervallarda eynilə təkrarlanır. Məsələn, verilən nümunədə bıçaq hər 4 saniyədən bir işçi səthdən 0,5 sm hündürlüyə çatmaqla bir lenti kəsmə işini bitirib digəri üçün hazır vəziyyətə gəlir. Bu proses hər 4 saniyədən bir təkrarlanır. Aydındır ki, 4-ün misilləri də uyğun funksiyanın dövrləridir.

Tutaq ki, elə $T \neq 0$ ədədi var ki, funksiyanın təyin oblastından götürülmüş istənilən x üçün $x \pm T$ də təyin oblastına daxildir və $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ ödənir. Onda $f(x)$ funksiyasına dövrü T olan dövri funksiya deyilir.
T dövrdürsə, onda $n \cdot T$ də ($n \in Z$) dövrdür.
Məsələn, $f(x \pm 2T) = f((x \pm T) \pm T) = f((x \pm T) = f(x)$
Funksiyanın ən kiçik müsbət dövrünə onun əsas dövrü deyilir.

Nümunə. Qrafikinə görə funksiyanın dövri olub-olmadığını göstərin.

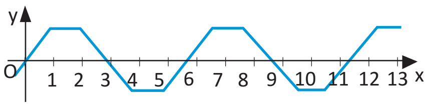


Qrafikdən göründüyü kimi, funksiyanın qiyməti hər 4 vahiddən bir təkrarlanır. Məsələn, $f(1) = f(5) = f(9) = \ldots$
Bu funksiya əsas dövrü 4 olan dövri funksiyadır.

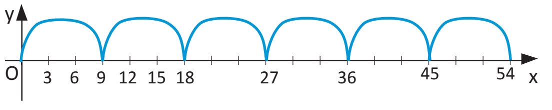
Öyrənmə tapşırıqları

1. Qrafikinə görə funksiyanın dövri olub-olmadığını göstərin, əsas dövrünü tapın.

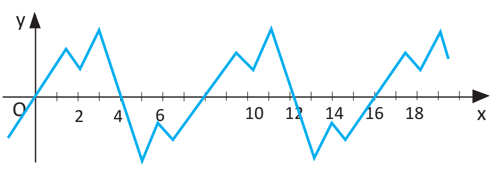
a)



b)

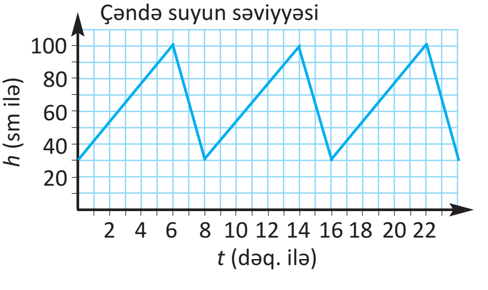


c)



2. Çəndən su müəyyən müddət axır, sonra əvvəlki səviyyəyə qədər doldurulur və yenidən müəyyən müddət axır və s.

1) Çənin bir dəfə dolub- boşalmasına nə qədər vaxt sərf edilir?
2) Bu funksiyanın qiymətlər çoxluğunu yazın.
3) 60-cı dəqiqədə çəndə suyun dərinliyi nə qədər olacaq?
4) Növbəti dəfə nə vaxt çəndə suyun dərinliyi 1 m olacaq?

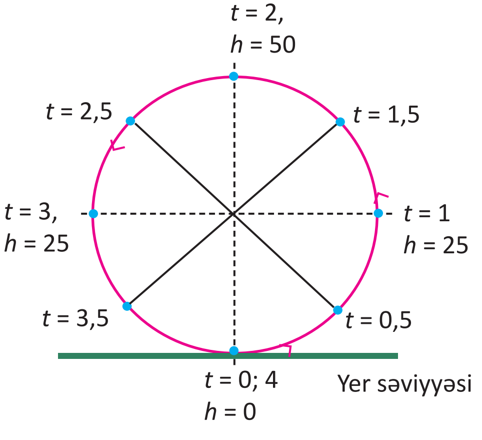


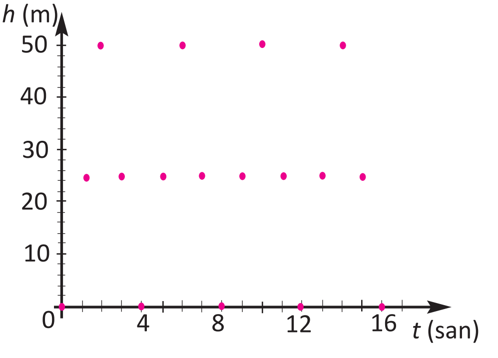
3. **Açıq tipli sual.** Əsas dövrü T = 6 olan hər hansı dövri funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

4. **Praktik məşğələ.** **Karuselin hərəkəti.** Diametri 50 m olan sürətli karusel bir tam dövrü 4 dəqiqədə başa vurur. Cədvələ görə $h = 0$ hündürlüyündə kabinə əyləşən şəxsin 1-ci, 5-ci, 9-cu dəqiqədə yerdən hansı hündürlükdə olacağını müəyyən edin.

Karuseldəki şəxsin yerdən hündürlüyünün zamandan asılılığı cədvəllə verilmiş və uyğun nöqtələr koordinat müstəvisi üzərində qeyd edilmişdir. Cədvəli və diaqramı dəftərinizdə çəkin. Uyğun nöqtələri rəngli karandaşlarla karuselin hər tam dövrünü ayrıca göstərmək şərtilə ardıcıl birləşdirin.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h	0	25	50	25	0	25	50	25	0



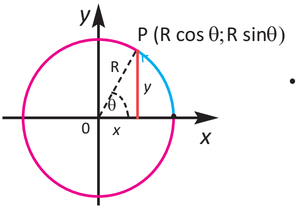


Triqonometrik funksiyalar

Radiusu R olan çevrə üzərində θ dönmə bucağına uyğun nöqtənin koordinatları

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta$$

düsturları ilə tapılır.



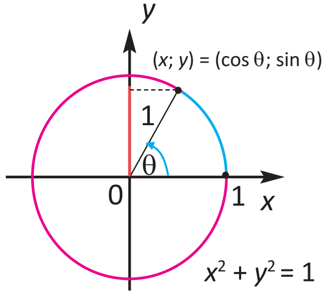
Çevrə üzrə hərəkətdə hər tam dövrdən (2π) bir nöqtənin koordinatları təkrarlanır.

$$\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta, \quad n \in Z$$

Yəni sinus və kosinus funksiyaları dövri funksiyalardır.

$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki

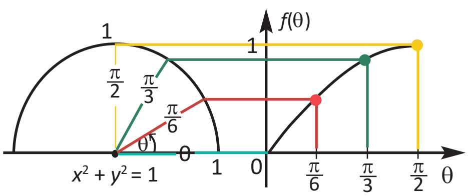
$f(\theta) = \sin\theta$ funksiyası vahid çevrə üzrə hərəkətdə nöqtənin ordinatının θ dönmə bucağından asılılığını göstərir.



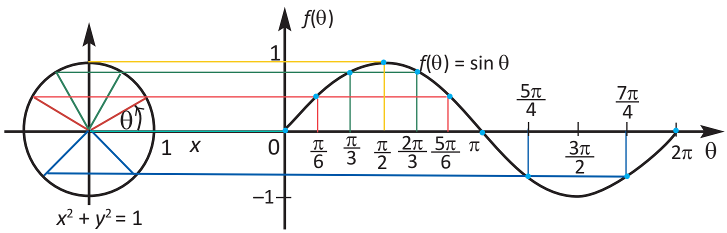
$f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafikini aşağıdakı addımlarla quraq.

1. Vahid çevrənin I rübdə yerləşən qövsünü üç bərabər qövsə ayıraq və absis oxu üzərində də uyğun parçaları qeyd edək.
2. Bölgü nöqtələrindən $(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$ absis oxuna paralel düz xətlər keçirək.
3. Bu xətlərin uyğun olaraq $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$ düz xətləri ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd edək.
4. Bu nöqtələri ardıcıl birləşdirək.

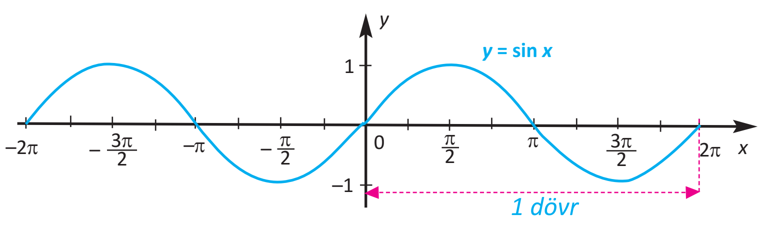
Alınan qrafik $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının $[0; \frac{\pi}{2}]$ aralığında qrafikidir.



Vahid çevrə boyu tam dönmənin 360° və ya 2π radian olduğu məlumdur.
$f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ aralığında analoji qayda ilə quraq:

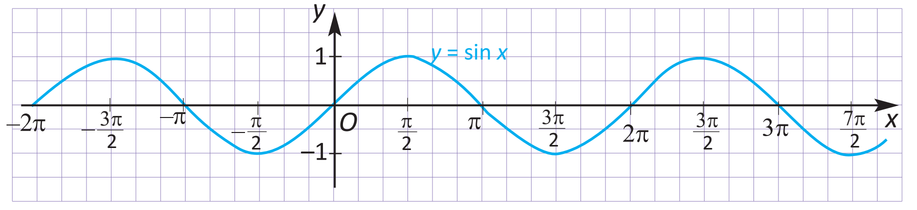


Sinus dövri funksiya olduğundan uzunluğu 2π olan aralıqlarda $f(\theta) = \sin\theta$ funksiyasının qrafiki eyni ilə təkrarlanır. Arqument üçün x, funksiya üçün y işarələməsindən istifadə etməklə funksiyanı $y = \sin x$ şəklində yazaq.
$y = \sin x$ funksiyasının $[-2\pi; 2\pi]$ aralığında qrafiki aşağıdakı kimi olacaq:



$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki sinusoid adlanır.

$y = \sin x$ funksiyasının qrafiki və xassələri:



1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.
2. Qiymətlər çoxluğu [–1; 1] parçasıdır.
3. sin x funksiyası tək funksiyadır: $\sin(-x) = -\sin x$. Yəni qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.
4. Əsas dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
5. Sinusoid absis oxunu ... , -2π; $-\pi$; 0; π; 2π; 3π, ... və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \pi n$ ($n \in Z$) olduqda $y = \sin x$ funksiyası sıfra çevrilir.

Sinusoid koordinat başlanğıcından keçir.

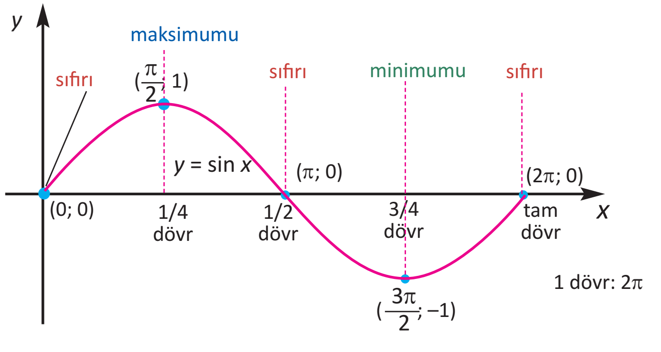
6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; ..., yəni $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in Z$) qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti –1-dir və bu qiyməti x-in ... , $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$; ..., yəni $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in Z$) qiymətlərində alır.

$y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin 5 əsas nöqtəsinə görə qurulması

[0; 2π] aralığında $y = \sin x$ funksiyasının sıfırları, maksimum və minimum nöqtələri aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir.

sıfrı **maksimum nöqtəsi** **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı**

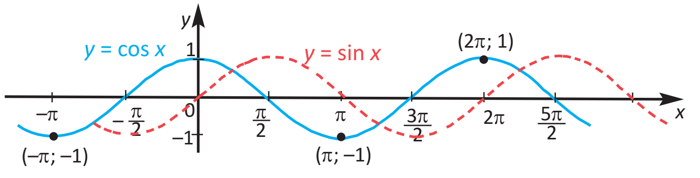
Bu nöqtələrə 5 əsas nöqtə deyəcəyik.



$y = \cos x$ funksiyasının qrafiki

$y = \cos x$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə analoji qaydada vahid çevrədən istifadə etməklə həndəsi üsulla və ya qiymətlər cədvəlinə görə qurmaq olar.

Həmçinin $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ olduğundan $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürsək, $y = \cos x$ funksiyasının qrafiki alınar.



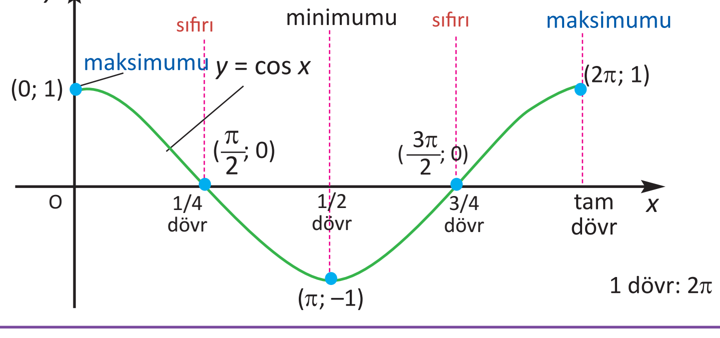
$y = \cos x$ funksiyasının xassələri:

1. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur: $x \in R$
2. Qiymətlər çoxluğu $[-1; 1]$ parçasıdır.
3. $y = \cos x$ funksiyası cüt funksiyadır (qrafiki y oxuna nəzərən simmetrikdir).
   $\cos(-x) = \cos x$.
4. Əsas dövrü 2π olan dövri funksiyadır: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5. Qrafik absis oxunu $\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ və s. nöqtələrində kəsir, yəni $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$ olduqda $y = \cos x$ funksiyası sıfra çevrilir.
   Qrafik ordinat oxunu $(0; 1)$ nöqtəsində kəsir.
6. Funksiyanın maksimum qiyməti 1-dir və bu qiyməti
   x-in $\ldots, -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi, 6\pi, \ldots,$ yəni $x = 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.
7. Funksiyanın minimum qiyməti –1-dir və bu qiyməti
   x-in $\ldots, -\pi; \pi; 3\pi; 5\pi, \ldots,$ yəni $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində alır.

$y = \cos x$ funksiyasının qrafikinin qurulması üçün 5 əsas nöqtə

Beş əsas nöqtə $y = \cos x$ funksiyası üçün $[0; 2\pi]$ aralığında aşağıdakı ardıcıllıqla növbələşir:

maksimum nöqtəsi **sıfrı** **minimum nöqtəsi** **sıfrı** **maksimum nöqtəsi**



Öyrənmə tapşırıqları

1. a) $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında beş əsas nöqtəyə görə qurun.

b) $[0; 2\pi]$ aralığında $\sin x = \frac{1}{3}$ bərabərliyini ödəyən neçə x ədədi var?

2. a) $y = \cos x$ funksiyasının qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında beş əsas nöqtəyə görə qurun.

b) $[0; 2\pi]$ aralığında $\cos x = 0{,}6$ bərabərliyini ödəyən neçə x ədədi var?

3. Funksiyaların qrafikini verilən aralıqlarda qurun.

a) $y = \sin x,\ 0 \le x \le 4\pi$

b) $y = \cos x,\ 0 \le x \le 4\pi$

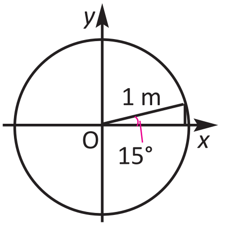
c) $y = \sin x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

d) $y = \cos x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

4. $y = \sin x$ funksiyasının maksimum nöqtələrinə uyğun arqumentin üç qiymətini yazın.

5. $y = \cos x$ və $y = \sin x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun, oxşar və fərqli cəhətlərini yazın.

6. Diametri 2 m olan diskin hərəkətini tənzimləmək üçün onun üzərinə işarə qoyulmuşdur və müəyyən zaman anlarında bu işarənin su səthindən hündürlüyü yoxlanılır. Bu yoxlamadakı şəkilləri çəkin və riyazi hesablamaları siz də yerinə yetirin. Bunun üçün vahid radiuslu çevrəni 15° addımla dönmə bucaqlarına bölün və hər addıma uyğun çevrə üzərindəki nöqtənin x oxundan məsafəsini müəyyən edin. Bu işi iki dövr (720°) üçün yerinə yetirin. Daha bir dövr üçün də uyğun qiymətləri bu yolla müəyyən etməyə ehtiyac varmı? Ehtiyac yoxdursa, bu qiymətləri birbaşa yazın, varsa hesablayın.



a) Diskin 15°, 375°, 735° dönmələrində işarə su səthindən hansı hündürlükdə olacaq?

b) Vahid çevrə üzərindəki qiymətləri koordinat müstəvisi üzərində qeyd etməklə qrafik qurun. Bu qrafik hansı funksiyanın qrafikinə oxşayır?

$y = a \cdot \sin x$ və $y = a \cdot \cos x$ funksiyalarının qrafikləri

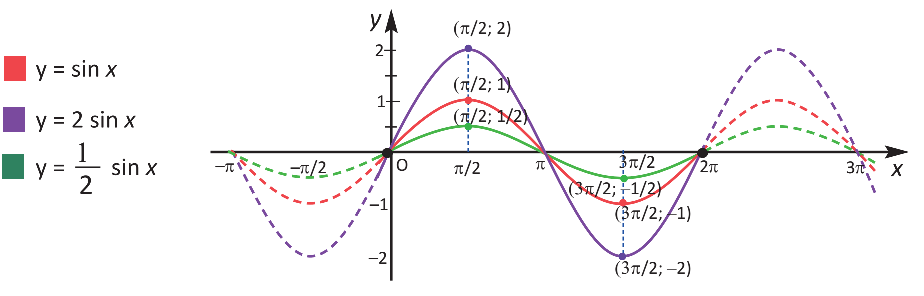
a əmsalının $y = a \cdot \sin x$, $y = a \cdot \cos x$ funksiyalarının qrafiklərinə təsirini nümunələr üzərində araşdıraq.

Nümunə 1. $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$ funksiyalarının $[0;2\pi]$ parçasında qrafiklərini 5 əsas nöqtəsinə görə eyni koordinat sistemində qurun.

Həlli. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki hər bir nöqtənin absisini olduğu kimi saxlayıb, ordinatını 2-yə vursaq, $y = 2\sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələrin absisini eynilə saxlayıb ordinatını 2-yə bölsək, $y = \frac{1}{2}\sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələri alarıq.

Verilən funksiyaların 5 əsas nöqtəsində qiymətlər cədvəlini tərtib edək.

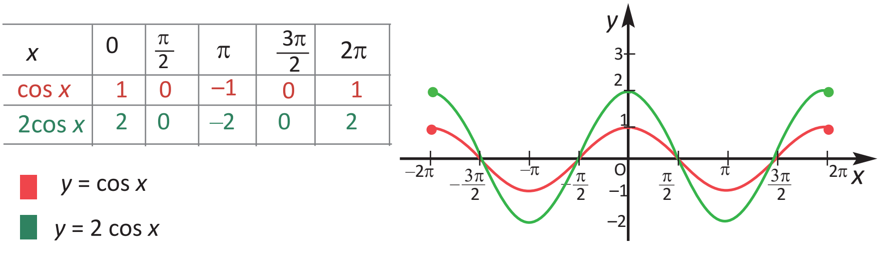
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	–1	0
$2\sin x$	0	2	0	–2	0
$\frac{1}{2}\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



Nümunə 2. $y = \cos x$ və $y = 2\cos x$ funksiyalarının qrafiklərini $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında eyni koordinat sistemində qurun.

Həlli: $y = 2\cos x$ funksiyasının qrafiki $y = \cos x$ qrafikinin absis oxundan 2 dəfə (şaquli olaraq) dartılmasıdır. Funksiyanın qrafikini $[0; 2\pi]$ parçasında qurduqdan sonra $[-2\pi; 0]$ parçasında təkrarlamaqla tələb olunan $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında qrafiki almaq olar.

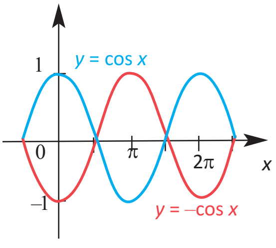
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	–1	0	1
$2\cos x$	2	0	–2	0	2



Nümunə 3. a) $y = \cos x$, $y = -\cos x$; b) $y = \sin x$, $y = -\frac{1}{2}\sin x$ funksiyalarının qrafikini eyni koordinat sistemində qurun.

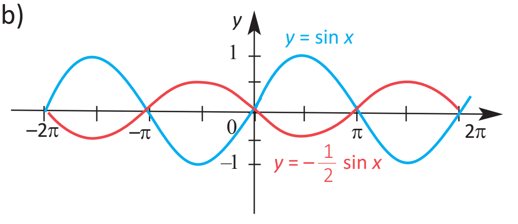
Həlli.

a)



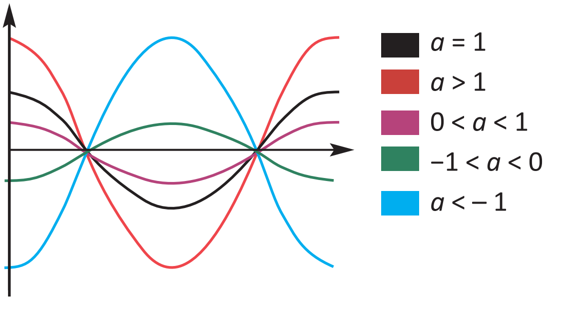
$y = -\cos x$ funksiyasının qrafiki $y = \cos x$ qrafikinin x oxuna nəzərən simmetrik çevrilməsidir.

b)



$y = -\frac{1}{2}\sin x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ qrafikinin absisi oxuna iki dəfə sıxılması və x oxuna nəzərən simmetrik çevrilməsi ilə alınır.

y = cosx (y= sinx) funksiyasının qrafikinin y = a·cosx (y= a·sinx) funksiyasının qrafikinə çevrilməsini ümumiləşdirək.



- $a > 0$
  - $a > 1$ olduqda funksiyanın qrafiki absis oxundan şaquli olaraq dartılır.
  - $0 < a < 1$ olduqda qrafik absis oxuna sıxılır.
- $a < 0$ olduqda qrafik x oxuna nəzərən simmetrik çevrilir.
  - $-1 < a < 0$ olduqda qrafik x oxuna nəzərən simmetrik çevrilir və absis oxuna sıxılır.
  - $a < -1$ olduqda qrafik x oxuna nəzərən simmetrik çevrilir və absis oxundan şaquli olaraq dartılır.

https://www.geogebra.org/calculator on-line qrafkalkulyatorda *a*-nın qiymətini dəyişməklə funksiyaların qrafiklərini qurun.

Öyrənmə tapşırıqları

1. $y = a \cdot \sin x$ funksiyasında a həddinin dəyişmələrinə görə alınan sinusoid necə dəyişəcək? Sözlə yazın, sxematik təsvir edin.

a) $a = 4$ b) $a = \frac{1}{2}$ c) $a = -3$ d) $a = -\frac{1}{2}$

2. $y = \sin x$ funksiyasının $[0; 2\pi]$ parçasında qrafikini beş əsas nöqtəyə görə qurun. Verilən funksiyalarda a həddinin dəyişməsi ilə beş nöqtənin koordinatlarının necə dəyişdiyini cədvəl tərtib etməklə göstərin, bu funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $y = 3 \sin x$ və $y = -3\sin x$ b) $y = \frac{1}{2} \sin x$ və $y = -\frac{1}{2} \sin x$

3. $y = \cos x$ funksiyasının $[0; 2\pi]$ parçasında qrafikini beş əsas nöqtəyə görə qurun. Verilən funksiyalarda a həddinin dəyişməsi ilə beş nöqtənin koordinatlarının necə dəyişdiyini cədvəl tərtib etməklə göstərin, bu funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $y = 3 \cos x$ b) $y = \frac{1}{2} \cos x$ c) $y = -2 \cos x$ d) $y = -\frac{1}{2} \cos x$

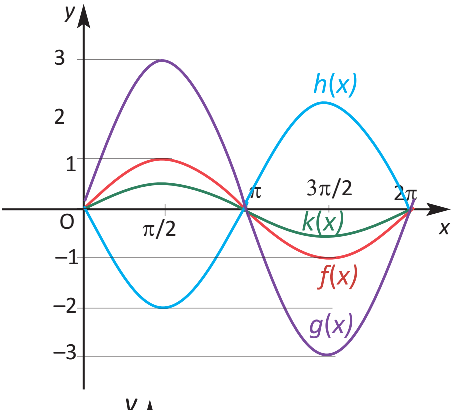
4. Hansı qrafikin hansı funksiyaya uyğun olduğunu müəyyən edin.

a) $y = \sin x$

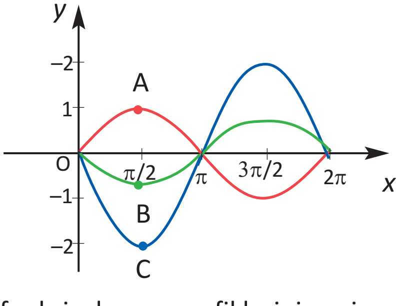
b) $y = -2 \sin x$

c) $y = \frac{1}{2} \sin x$

d) $y = 3 \sin x$



5. Qrafiklər üzərində verilən nöqtələrin koordinatları A $(\frac{\pi}{2}; 1)$, B $(\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{2})$, C$(\frac{\pi}{2}; -2)$ kimidir. Hər bir sinosidə uyğun funksiyanın düsturunu yazın.



6. $y = \cos x$, $y = -\cos x$, $y = -2\cos x$, $y = 2\cos x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

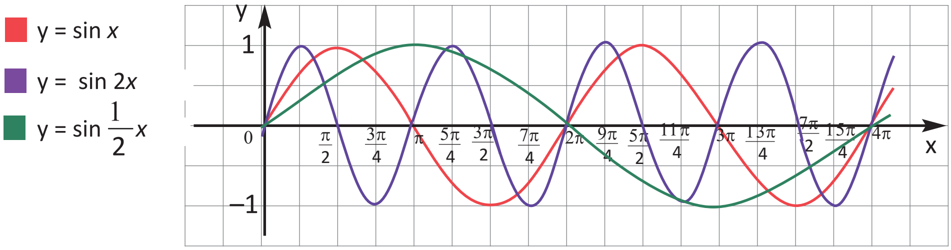
y = sin bx və *y = cos bx* funksiyalarının qrafikləri

b əmsalının *y = sin bx*, *y = cos bx* funksiyalarının qrafiklərinə təsirini nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 2. $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ və $y = \sin\frac{1}{2}x$ funksiyaların qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

Həlli: Bu funksiyalar üçün 5 əsas nöqtə cədvəldə verilmişdir.

	sıfrı	maksimumu	sıfrı	minimumu	sıfrı
$y = \sin x$	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \pi$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$x = 2\pi$
$y = \sin 2x$	$2x = 0$ $x = 0$	$2x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{\pi}{4}$	$2x = \pi$ $x = \frac{\pi}{2}$	$2x = \frac{3\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{4}$	$2x = 2\pi$ $x = \pi$
$y = \sin\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x = 0$ $x = 0$	$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2}$ $x = \pi$	$\frac{1}{2}x = \pi$ $x = 2\pi$	$\frac{1}{2}x = \frac{3\pi}{2}$ $x = 3\pi$	$\frac{1}{2}x = 2\pi$ $x = 4\pi$



$y = \sin x$ funksiyası 0-dan 1-ə qədər qiymətlərini $[0; \frac{\pi}{2}]$ parçasında, $y = \sin 2x$ funksiyası isə bu qiymətləri $[0; \frac{\pi}{4}]$ parçasında alır. $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtənin ordinatını dəyişməyib, absisini $\frac{1}{2}$-ə vursaq, $y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtə alınır. $y = \sin 2x$ funksiyasının qrafiki $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən 2 dəfə sıxılmış olur, tam dövrünü $[0; \pi]$ parçasında tamamlayır. $y = \sin 2x$ funksiyası $y = \sin x$ funksiyasını 2 dəfə “qabaqlayır”.

$y = \sin\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafiki isə $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin ordinat oxundan 2 dəfə dartılması ilə alınır, tam dövrünü $[0; 4\pi]$ parçasında tamamlayır.

Öyrənmə tapşırıqları

7. 1) $y = \sin x$ funksiyasının qrafikini; 2) $y = \cos x$ funksiyasının qrafikini

a) ordinat oxundan 4 dəfə dartdıqda;

b) ordinat oxuna 3 dəfə sıxdıqda hansı funksiyanın qrafiki alınar?

8. Funksiyaların hər birinin qrafikinin $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

a) $y = \cos\frac{1}{3}x$ b) $y = \cos 4x$ c) $y = -4\cos 3x$

$y = a \cdot \sin bx$, $y = a \cdot \cos bx$ funksiyalarının dövrü və amplitudu

$y = a \cdot \sin bx$ və ya $y = a \cdot \cos bx$, ($b \neq 0$) funksiyalarının qrafiklərindən göründüyü kimi $|b| \neq 1$ olduqda əsas dövr 2π -dən fərqli olur.
$y = a \cdot \sin bx$ və ya $y = a \cdot \cos bx$ şəklində verilmiş istənilən funksiyanın dövrünü tapmaq üçün aşağıdakı ikiqat bərabərsizliyi həll etmək kifayətdir:

$$0 \leq |b|x \leq 2\pi$$

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{|b|}$$

Bərabərsizliyin həlli göstərir ki, verilən funksiyaların əsas dövrü $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$ düsturu ilə tapılır.
$|a|$ **amplitudu** göstərir.

Nümunə 1. $y = -3\sin 4x$ funksiyasının amplitudunu və dövrünü yazın.

Həlli: Amplitud: $|-3|$, yəni 3,

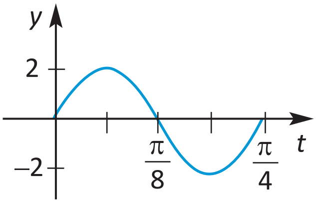
Əsas dövr: $0 \leq 4x \leq 2\pi$, $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{4}$, $\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$T = \frac{\pi}{2}$$

Nümunə 2. Qrafikinə görə funksiyanın düsturunu $y = a \cdot \sin bx$ şəklində yazın.

Həlli: Qrafikə görə amplitud 2-yə bərabərdir:

$$a = 2$$



Funksiyanın əsas dövrü: $T = \dfrac{\pi}{4}$.

Həmçinin $T = \dfrac{2\pi}{b}$ olduğundan $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{\pi}{4}$.

Buradan $b = 8$ tapırıq.

Funksiyanın düsturu: $y = 2\sin 8x$

Nümunə 3. $y = 2\sin 2x$ funksiyasının amplitudunu, dövrünü tapın, qrafikini $[-\pi; \pi]$ parçasında qurun.

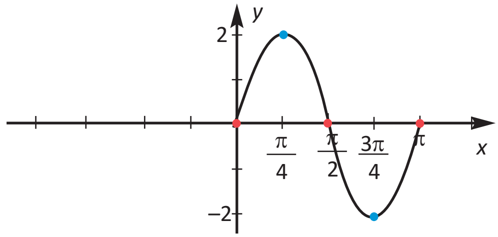
Həlli: Amplitud: $a = 2$

Əsas dövr: $T = \dfrac{2\pi}{|b|}$, $b = 2$; $T = \pi$

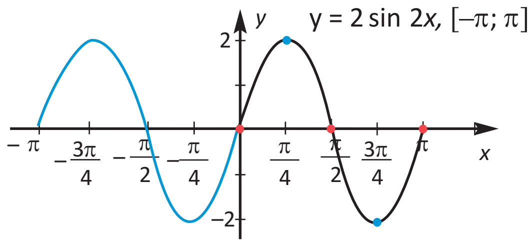
Verilən funksiyanın qrafikini $[0; \pi]$ parçasını (bir dövrü) 4 bərabər hissəyə bölməklə ($\dfrac{\pi}{4}$ addımı ilə) 5 əsas nöqtəsinə görə quraq.

5 əsas nöqtəni cədvəllə göstərək.

	x	$y = 2\sin 2x$
sıfırı	0	0
maksi-mum	$\frac{\pi}{4}$	2
sıfırı	$\frac{\pi}{2}$	0
minimum	$\frac{3\pi}{4}$	–2
sıfırı	π	0



Daha sonra qurulmuş qrafiki π vahid sola paralel köçürməklə $[-\pi;\ 0\,]$ parçasında təkrarlayaq. Alınan qrafik $y = 2\sin 2x$ funksiyasının $[-\pi;\,\pi]$ parçasında qrafikidir.



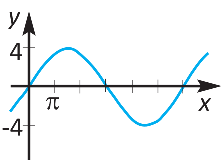
Öyrənmə tapşırıqları

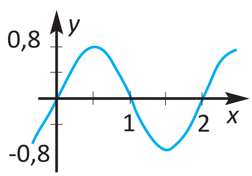
9. Verilən funksiyaların amplitudunu və dövrünü müəyyən edin.

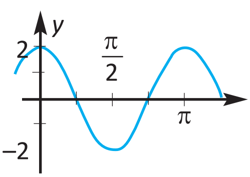
a) $y = \frac{1}{2}\cos \pi x$ b) $y = \sin 2x$ c) $y = 3\cos\frac{1}{4}\,x$

d) $y = 5\cos\frac{1}{2}\,x$ e) $y = 2\sin\frac{1}{2}\,\pi x$ f) $y = \frac{1}{3}\sin 4\pi x$

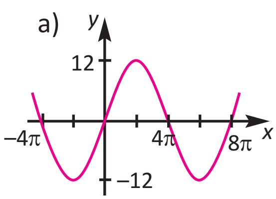
10. Verilən funksiyaların amplitudunu və dövrünü müəyyən edin.

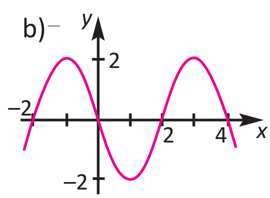
a)


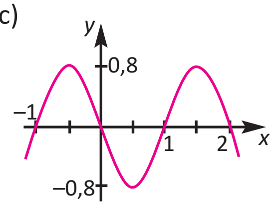
b)


c)


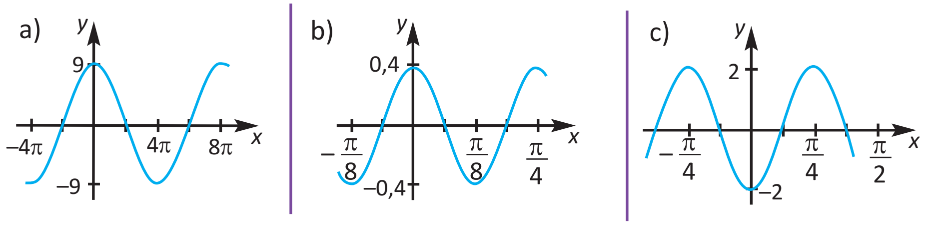
11. Verilən qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a \cdot \sin bx$ şəklində yazın.

a)


b)


c)


12. Verilən qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a \cdot \cos bx$ şəklində yazın.



13. 1) Amplitud və dövrü verilən $y = a \cdot \sin bx$ funksiyasının düsturunu yazın (burada $a > 0$, $b > 0$).

a) Amplitudu: $\frac{1}{2}$
Dövrü: 3π

b) Amplitudu: 4
Dövrü: π

c) Amplitudu: 2
Dövrü: 2π

2) Amplitud və dövrü verilən $y = a \cdot \cos bx$ funksiyasının düsturunu yazın (burada $a > 0$, $b > 0$).

a) Amplitudu: $\frac{1}{3}$
Dövrü: 5π

b) Amplitudu: 2
Dövrü: π

c) Amplitudu: 5
Dövrü: $\frac{\pi}{2}$

14. $f(x)$ funksiyasının əsas dövrünü müəyyən edin, 5 əsas nöqtəsinə görə qrafikini qurun.

a) $f(x) = 2\sin\frac{2x}{3}$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ c) $f(x) = 3\sin\frac{1}{3}x$

15. Hansı funksiyanın amplitudu 4, əsas dövrü 2-dir?

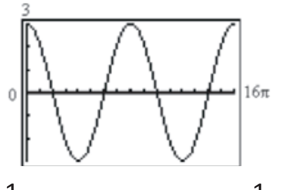
a) $g(x) = 4\cos 2x$

c) $g(x) = 2\cos\frac{1}{2}x$

b) $g(x) = 4\cos \pi x$

d) $g(x) = 2\sin 4x$

16. Elmir qrafkalkulyatorla şəkildəki kimi sinusoid qurmuşdur. Elmir hansı funksiyanın qrafikini qurmuşdur?



a) $y = -3\sin 4x$ b) $y = 3\cos 4x$ c) $y = 3\sin\frac{1}{4}x$ d) $y = 3\cos\frac{1}{4}x$

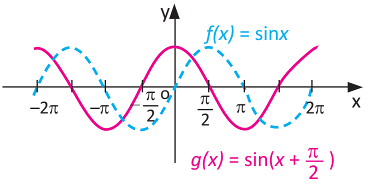
$y = \sin(x-c)$ və $y = \cos(x-c)$ funksiyalarının qrafikləri

$y = \sin(x-c)$, $y = \cos(x-c)$ funksiyasında c həddi qrafikin üfüqi sürüşməsini göstərir və **faza sürüşməsi** adlanır.

Nümunə 1. $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ funksiysının qrafikinin $f(x) = \sin x$ funksiyasına nəzərən çevrilməsini sözlə yazın və qrafikləri eyni koordinat sistemində təsvir edin.

Həll. $f(x) = \sin x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{2}$ vahid sola sürüşdürsək, $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ funksiyasının qrafiki alınar.

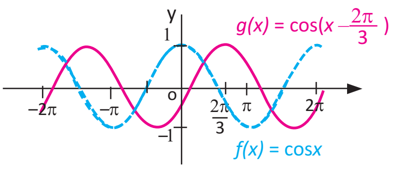
Bu halda f-in $x = 0$ nöqtəsindən başlayan dövrünə g-nin $x = -\frac{\pi}{2}$-dən başlayan dövrü uyğun gəlir.



Nümunə 2. $y = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ funksiysının qrafikinin $f(x) = \cos x$ funksiyasına nəzərən çevrilməsini sözlə yazın və qrafikləri eyni koordinat sistemində təsvir edin.

Həll. $f(x) = \cos x$ funksiyasının qrafikini $\frac{2\pi}{3}$ vahid sağa sürüşdürsək, $h(x) = \cos(x - \frac{2\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki alınar.

Bu halda f-in $x = 0$ nöqtəsindən başlayan dövrünə h-ın $x = \frac{2\pi}{3}$-dən başlayan dövrü uyğun gəlir.



c həddi faza sürüşməsini, üfüqi sürüşməni müəyyən edir.
$c > 0$ olduqda sağa, $c < 0$ olduqda isə sola sürüşmə baş verir.

Öyrənmə tapşırıqları

17. Verilən funksiyanın qrafikinin $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın. Qrafikləri eyni koordinat sistemində təsvir edin.

a) $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ c) $y = \sin(x + 60^{\circ})$

18. Verilən funksiyanın qrafikinin $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın. Qrafikləri eyni koordinat sistemində təsvir edin.

a) $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ b) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ c) $y = \cos(x + 180^{\circ})$

19. a) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$; b) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu funksiyalarla $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyalarının əlaqəsini araşdırın.

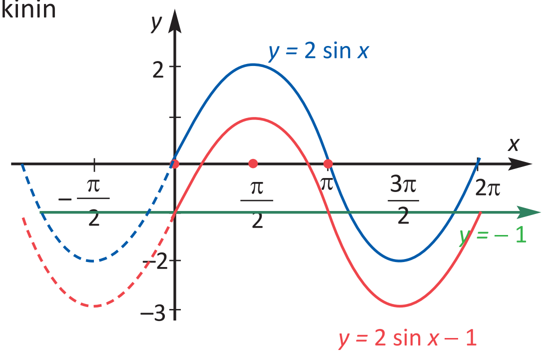
$y = a \cdot \sin bx + d$, $y = a \cdot \cos bx + d$ funksiyalarının qrafiki

$y = a \cdot \sin bx + d$, $y = a \cdot \cos bx + d$ funksiyalarında d həddi şaquli sürüşməni göstərir: $d > 0$ olarsa, funksiyanın qrafiki yuxarı, $d < 0$ olarsa, aşağı sürüşdürülür.

Nümunə. $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikinə çevrilmə addımları aşağıdakı kimidir:

1. Amplitudu 2 dəfə artırılır, $y = 2 \sin x$ funksiyasının qrafiki alınır.
2. Bir vahid aşağı sürüşdürülür və $y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafiki alınır.



$y = 2 \sin x - 1$ funksiyasının qrafikinə görə:

amplitud: $a = 2$

şaquli yerdəyişmə: $d = -1$

maksimum qiymət: $d + a = -1 + 2 = 1$

minimum qiymət: $d - a = -1 - 2 = -3$

qiymətlər çoxluğu: $-3 \le y \le 1$.

Öyrənmə tapşırıqları

20. $y = \sin x - 2$, $y = \sin x$, $y = \sin x + 2$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

21. Funksiyaların qrafiklərini təsvir edin, qiymətlər çoxluğunu yazın.

a) $y = 3 \cos x + 5$ b) $y = 4 \sin x - 4$

c) $y = 2 \sin x + 1$ d) $y = -2 \cos x + 3$

22. Verilən funksiyanın qrafikinin $y = \sin x$ və ya $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

a) $y = 5 - \cos(x - \frac{\pi}{4})$ c) $y = 3 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

b) $y = -2 - \sin(x - \pi)$ d) $y = 2 + \sin(x - \frac{\pi}{3})$

$y = a \cdot \sin b(x - c) + d$

amplituda təsir edir

əsas dövrə təsir edir

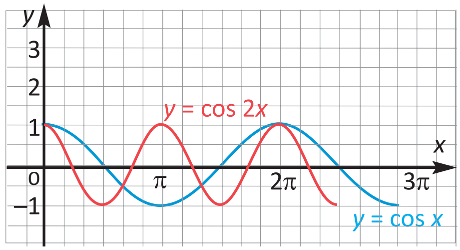
üfüqi yerdəyişməyə təsir edir

şaquli yerdəyişməyə təsir edir

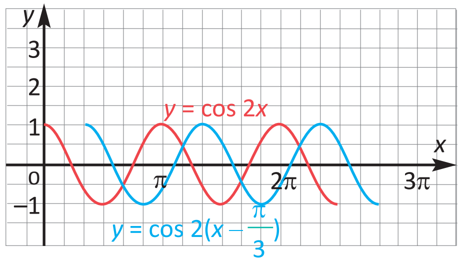
Nümunə 1. $y = 3\cos 2(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli:

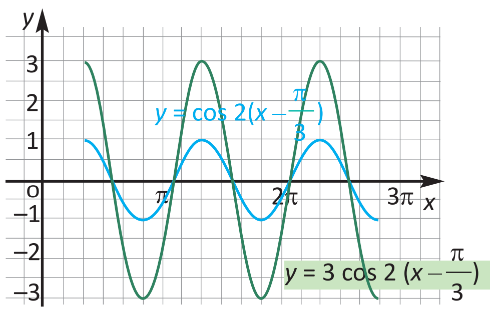
1) $y = \cos x$ funksiyasının qrafikini ordinat oxuna 2 dəfə sıxmaqla $y = \cos 2x$ funksiyasının qrafiki alınır.



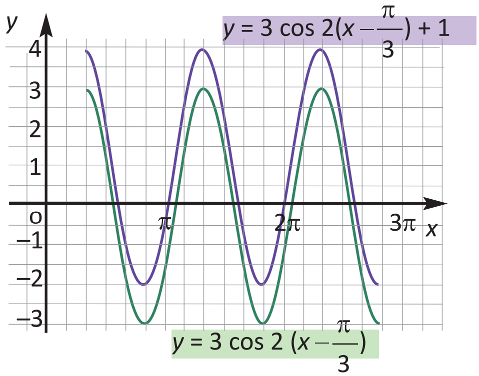
2) $y = \cos 2x$ funksiyasının qrafikini $\frac{\pi}{3}$ vahid sağa sürüşdürməklə $y = \cos 2(x - \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki qurulur.



3) $y = \cos 2(x - \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafikini absis oxundan ordinat oxu boyunca 3 dəfə dartmaqla $y = 3\cos 2(x - \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki qurulur.



4) $y = 3\cos 2(x - \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafikini şaquli istiqamətdə 1 vahid yuxarı sürüşdürməklə $y = 3\cos 2(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ funksiyasının qrafiki qurulur.



Nümunə 2. $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

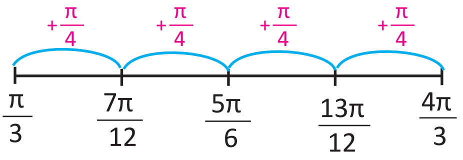
funksiyasının qrafikini 5 əsas nöqtəsinə görə qurun.

Həlli:

1. $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ funksiyasının əsas dövrünü tapmaq üçün $0 \le 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \le 2\pi$ bərabərsizliyi həll edilir: $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

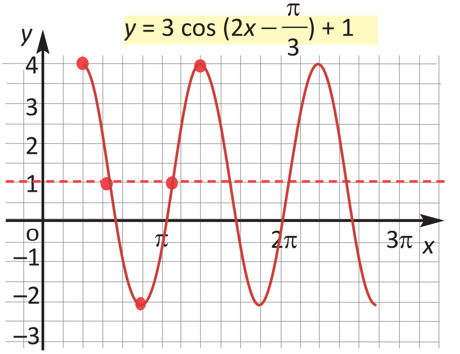
$\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$ olduğundan əsas dövr $T = \pi$

2. $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$ parçasını 4 bərabər hissəyə bölməklə 5 əsas nöqtənin absisləri müəyyən edilir.



3. x-in bu qiymətlərini $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ düsturunda nəzərə almaqla $\left(\frac{\pi}{3}; 4\right)$, $\left(\frac{7\pi}{12}; 1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; -2\right)$, $\left(\frac{13\pi}{12}; 1\right)$ $\left(\frac{4\pi}{3}; 4\right)$ nöqtələri müəyyən edilir

4. Funksiyanın qrafiki qurulur.



$y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ funksiyasının:

amplitudu: $a = 3$, əsas dövrü: $T = \pi$,

faza sürüşməsi: $c = \frac{\pi}{3}$, şaquli yerdəyişməsi: $d = 1$

maksimum qiyməti: $d + a = 1 + 3 = 4$,

minimum qiyməti: $d - a = 1 - 3 = -2$,

təyin oblastı: həqiqi ədədlər çoxluğu ($x \in R$),

qiymətlər çoxluğu: $-2 \le y \le 4$

Öyrənmə tapşırıqları

23. Funksiyaların hər birinin qrafikinin $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

a) $y = \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ b) $y = 3 \sin \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y = 2 \sin(x + 60^\circ) - 4$

24. Funksiyaların hər birinin qrafikinin $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə nəzərən çevrilməsini sözlə yazın.

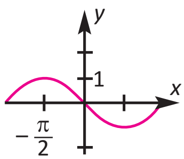
a) $y = \cos\left(x - \dfrac{5\pi}{6}\right)$ b) $y = 3 \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $y = 4 \cos(x - 15^\circ) + 3$

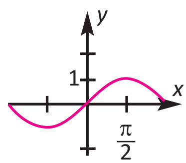
25. Funksiyaların maksimum və minimumunu tapın, qiymətlər çoxluğunu yazın.

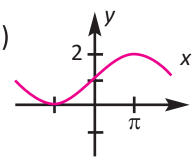
a) $y = 3 \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 5$ b) $y = \dfrac{1}{2} \sin 3x - 3$ c) $y = \dfrac{1}{3} \cos(x + 50^\circ) + \dfrac{1}{6}$

26. Hansı qrafikin hansı funksiyaya aid olduğunu müəyyən edin.

1) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 2) $y = -\sin(x + \pi)$ 3) $y = 1 + \sin \dfrac{1}{2}x$

a) 

b) 

c) 

27. Verilənlərə görə funksiyanın düsturunu $y = a \cdot \sin b(x - c) + d$ şəklində yazın.
a) amplitud 4, əsas dövrü π, faza sürüşməsi $\dfrac{\pi}{4}$ vahid sağa, şaquli yerdəyişmə 6 vahid aşağı.
b) amplitud 0,5, əsas dövrü 3π, faza sürüşməsi $\dfrac{\pi}{3}$ vahid sola, şaquli yerdəyişmə 2 vahid yuxarı.

28. Funksiyaların qrafikini uzunluğu bir dövrə bərabər olan parçada 5 əsas nöqtəsini müəyyən etməklə qurun.

a) $y = \sin \dfrac{1}{4} x$ b) $y = 5 \sin 2\pi x$ c) $y = 3 \cos 4x$ d) $y = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

29. Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

a) $y = 3 \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$ c) $y = 2 \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3$

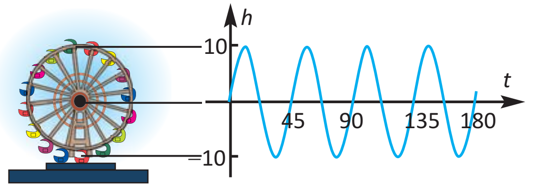
Nümunə 1. Karuselin hərəkəti. Karuselin hər hansı kabinəsində oturmuş olsanız, sizin yerdən olan məsafəniz zamandan asılı olaraq dövri dəyişəcək. Karuselin oxu ilə eyni səviyyədən hərəkətə başlandığını qəbul edək. Karuselin diametri 20 m-dir və 3 dəqiqədə 4 dəfə dövr edir.

a) Absis oxu üzərində zamanı (saniyə ilə), ordinat oxu üzərində başlanğıc səviyyədən olan məsafəni qəbul etməklə karuselin hərəkət qrafikini çəkin.

b) Karuselin hərəkətinə uyğun funksiyanın əsas dövrünü tapın və düsturunu yazın.

Həlli: Karusel 3 dəqiqədə 4 dövr edirsə, deməli, bir dövrə dəqiqənin $\frac{3}{4}$ -ü qədər, yəni 45 saniyə sərf edilir.

Karuselin kabinəsi başlanğıc vəziyyətdən 20 : 2 = 10 m yuxarıda (10) və ya aşağıda (–10) ola bilər. Bu hərəkətin qrafikinin periodu 45 saniyə olan sinusoid olduğunu görərik.



Funksiyanın düsturunu
$y = a\cdot \sin bx$ şəklində yazaq.

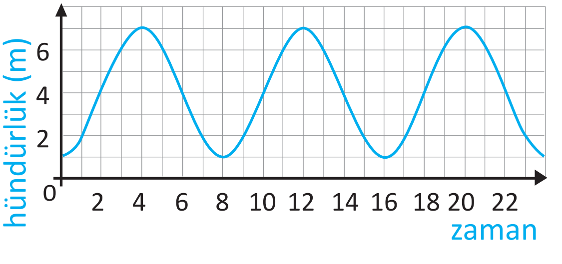
$T = \frac{2\pi}{b}$,

$\frac{2\pi}{b} = 45$,

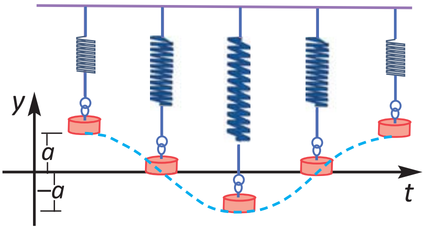
$b = \frac{2\pi}{45}$. Amplitud: 10

Funksiyanın düsturu: $h = 10\sin\frac{2\pi}{45}t$.

1. Nərgiz karuseldə. Qrafik Nərgizin karuseldə olarkən yerdən hündürlüyünün (metrlə) zamandan (saniyə ilə) asılılığını əks etdirir.
1) Təsvir olunmuş funksiyanın dövrünü tapın. Bu nəyi ifadə edir?
2) Bu funksiyanın qiymətlər çoxluğunu yazın.
3) Nərgiz 24 -30 saniyə intervalının hansı anında 4 m hündürlükdə olacaq?

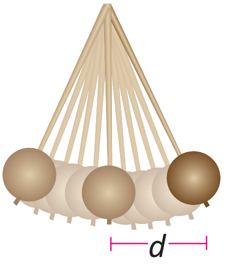


2. **Fizika.** Şəkildə yaydan asılmış cismin hərəkəti təsvir edilmişdir. Cisim sükunətdə olduqda sistem tarazlıqdadır. Cismin sükunət halı hərəkətin başlanğıcı olaraq qəbul edilir. ***a*** hərəkət başlanğıcından **yerdəyişməni** göstərir. Vahid zamandakı dövrlərin sayı **tezlik (ν)**, cismin tam bir rəqsə sərf etdiyi zaman rəqsin dövrü, **periodu** (T) adlanır. Tezlik və period qarşılıqlı tərs kəmiyyətlərdir: $\nu = \frac{1}{T}$

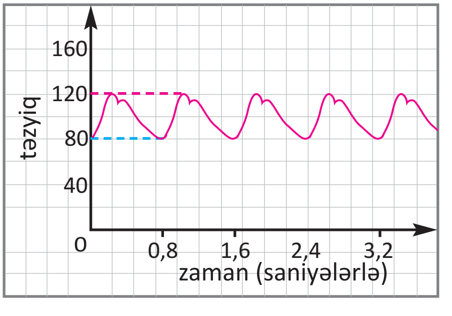


Cismin rəqsi hərəkətini $y = a\cos kt$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada y yayın tarazlıq vəziyyətindən şaquli yerdəyişməsini (sm-lə), a başlanğıc yerdəyişməni, k sabiti yayın elastiklik əmsalını, t isə zamanı (saniyə ilə) göstərir. $a = 0{,}5$ sm və $k = 5\pi$ olarsa, rəqsi hərəkətin amplitudunu, periodunu və tezliyini tapın.

3. Rəqqasın hərəkətini $d = 4\cos 8\pi t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Burada, d rəqqasın başlanğıc vəziyyətindən uzaqlaşmasını (santimetrlə), t zamanı (saniyələrlə) göstərir. Rəqqas başlanğıc vəziyyətindən ən çoxu neçə santimetr uzaqlaşır? Rəqsin dövrünü və tezliyini tapın.



4. İnsanın hər ürək döyüntüsündə (ürək bir dəfə vurduqda) qanın təzyiqi ən yüksək və ən aşağı qiyməti arasında dəyişir. Normal qan təzyiqinin yuxarı səviyyəsi tibbdə sistola adlanır və 120 mm civə sütunu, aşağı səviyyəsi isə diastola adlanır və 80 mm civə sütunu səviyyəsində qəbul edilir.



Şəkildəki qrafik bir şəxsin qan təzyiqinin dəyişməsini əks etdirir.

1) Qrafikə görə periodu (bir ürək döyüntüsünə sərf olunan vaxt) və amplitudu təyin edin.
2) Bu şəxsin bir dəqiqədəki ürək döyüntülərinin sayını tapın.

5. Velosipedin gecə düz yolda hərəkəti video-qeydə alınmışdır. Velosipedin təkərinin üzərində olan işığın müxtəlif vaxtlarda yerdən olan hündürlükləri videodan ölçülmüş və cədvəl tərtib edilmişdir.

Zaman (t san)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Hündürlük (H sm)	27	45	54	45	27	18	27	45	54

a) Funksiyanın bir dövrə uyğun qrafikini qurun.
b) H-ın t-dən asılılığını triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin.
c) Velosipedin təkərinin diametrini tapın.
d) Velosiped hansı sürətlə hərəkət edib?

Nümunə 2. Biologiya. Bioloqlar heyvanların, quşların çoxalmasını araşdırmaq üçün triqonometrik funksiyalarla modelləşdirir, müəyyən proqnozlar verirlər. Alimlər eyni regionda bayquşların və siçanların çoxalmasını araşdırmışlar. Onların tədqiqatları əsasında bayquşların zamandan (aylarla) asılı sayını
$B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, siçanların sayını $S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$
funksiyası ilə modelləşdirmək olar.
Bu funksiyaların qrafiklərinə görə bayquşların və onların yemi olan siçanların sayının dəyişməsi haqqında fikir yürütmək mümkündür.
a) Hər iki funksiyanın qrafikini qurun.
b) Bayquşların və siçanların sayının dəyişməsi haqqında fikir yürüdün.
c) Bayquşların sayının siçanların sayına nisbətinin dəyişməsini zamana görə araşdırın.

Həlli: a) $B(t) = 1000 + 100\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$

Bayquşların sayına uyğun funksiyanın maksimumu 1100, minimumu 900-dür.

Amplitudu: 100 Şaquli sürüşmə: $d = 1000$ (ilkin sayı)
Dövrü: $\frac{2\pi}{|b|}$, $b = \frac{\pi}{12}$ olduğundan $2\pi : \frac{\pi}{12} = 24$
Deməli, əsas dövr 24 aydır.

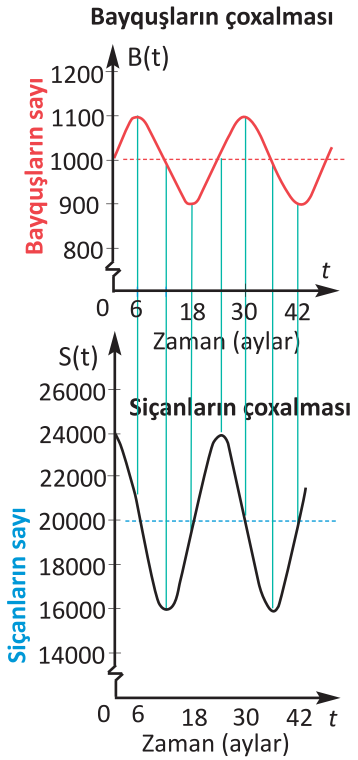
$S(t) = 20000 + 4000\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$
Siçanların sayına uyğun funksiyanın maksimumu 24 000, minimumu 16 000-dir.

Amplitudu: 4000 Şaquli sürüşmə: d = 20000 vahid (ilkin sayı)

Əsas dövrü: $\dfrac{2\pi}{|b|}$, $b = \dfrac{\pi}{12}$ olduğundan $2\pi : \dfrac{\pi}{12} = 24$

Deməli, bu funksiyanın da əsas dövrü 24 aydır.

b) Qrafiklər eyni miqyasla qurulduğundan onları müqayisə etmək olar. Bu müqayisə göstərir ki, bayquşların sayı artdıqda siçanların sayı azalır və bayquşlara yem olan siçanların sayı minimum qiymətə yaxınlaşır. Siçanların sayı bayquşların sayı azaldıqda artmağa başlayır.



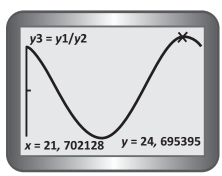
c) Cədvəldə hər 6 ayda bayquşların sayının siçanların sayına olan nisbəti verilmişdir.

Vaxt	Bayquş	Siçan	Nisbət
0	1000	24000	0,041
6	1100	20000	0,055
12	1000	16000	0,062
18	900	20000	0,045
24	1000	24000	0,041

Bu nisbət müəyyən qanunauyğunluqla dəyişməlidir. Qanunauyğunluğu görmək üçün qrafkalkulyatorda nisbətə uyğun funksiyanın qrafikini aşağıdakı qayda ilə quraq.

Qrafkalkulyatora B(t) = 1000 + 100 sin $\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$ funksiyasını y_1, S(t) = 20000 + 4000 cos $\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$ funksiyasını y_2 kimi daxil etməklə $y = \dfrac{y_1}{y_2}$ funksiyasının qrafikini quraq.

Göründüyü kimi, bu halda iki dövrü funksiyanın nisbəti də dövrü funksiya olur.



6. **Biologiya.** Dovşanların D(t) və çaqqalların Ç(t) sayını göstərən riyazi modellər:

$D(t) = 30000 + 15000\cos\frac{\pi t}{12}$

$Ç(t) = 4000 + 2000\sin\frac{\pi t}{12}$ kimidir.

Hər iki funksiyanın qrafikini eyni koordinat sistemində qurun və şəkildə göstərilmiş şərti diaqramı qrafik üzərində təqdim edin.

7. **Hava proqnozu.** Cədvəldə verilmiş məlumat aylıq orta temperaturu göstərir. Yanvar ayını $t = 1$, fevral ayını $t = 2$ və s. qəbul etməklə ayları üfüqi, temperaturu isə şaquli ox üzərində qeyd edərək cədvələ uyğun qrafik qurun. Temperatur dəyişməsini triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin.

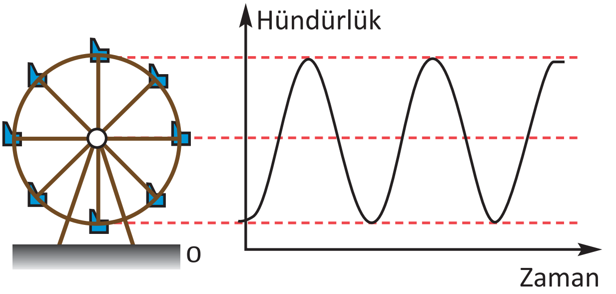
Aylar	Yanvar	Fevral	Mart	Aprel	May	Iyun	Iyul	Avqust	Sentyabr	Oktyabr	Noyabr	Dekabr
Orta temperatur (°C)	–14,8	–12,7	–6,8	1,2	9,2	15,1	17,2	15,1	9,1	1,3	–6,7	–12,6

8. **Sağlamlıq.** $P = 100 - 20\cos\frac{5\pi t}{2}$ funksiyası ilə sakit dayanmış şəxsin t (saniyə) zamanındakı qan təzyiqini müəyyən etmək olar.

a) funksiyanın əsas dövrünü müəyyən edin.

b) şəxsin 1 dəqiqədəki ürək döyüntülərinin sayını müəyyən edin.

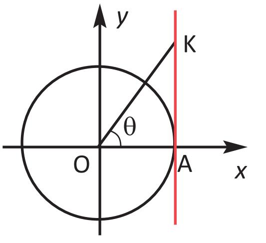
9. Karusel yerdən 10 m hündürlükdəki ox ətrafında hər 60 saniyədə bir dövrə vurur. Sərnişinlər karuselə kabinələr ən aşağıda, yerdən 2 m hündürlükdə olduqda minirlər. Şəkildəki qrafik karuselin ilk 150 saniyədəki hərəkətini təsvir edir.



a) Karusel hərəkətə başladıqda ən aşağıda yerləşən kabinənin istənilən anda yerdən olan hündürlüyünü müəyyən edən funksiyanın düsturunu yazın.

b) Günel karusel hərəkətə başlayanda ən aşağıdakı kabinədə idi. Hərəkətin 2,5 dəqiqəsində Günelin yerdən təqribən hansı hündürlükdə olduğunu müəyyən edin.

Araşdırma. **Bucağın tangensinin dəyişməsi.** 1) Damalı vərəqdə koordinat müstəvisi və mərkəzi koordinat başlanğıcında olan vahid radiuslu çevrə çəkin. Çevrəyə (1;0) nöqtəsində toxunan çəkin.



2) θ dönmə bucağının son tərəfinin bu toxunanla kəsişmə nöqtəsini K ilə qeyd edin. ΔOAK-dan tan θ–nı tapın.

$\tan\theta = \dfrac{AK}{OA} = \dfrac{AK}{1} = AK$

İti θ dönmə bucağı üçün tan θ qiymətcə AK parçasının uzunluğuna bərabərdir.

3) 45^o-li bucağın son tərəfi toxunanla hansı nöqtədə kəsişir?

4) Transportirin köməyilə müxtəlif ölçülü daha bir neçə bucaq çəkin və onların tərəfinin toxunanla kəsişmə nöqtələrinin ordinatını tapın.

5) θ bucağı 90^o-yə yaxınlaşdıqca, K nöqtəsinin ordinatı necə dəyişir?

$\theta = 90^o$ olduqda bucağın son tərəfi toxunanla kəsişərmi?

6) Dövrü T olan funksiyanı araşdırmaq üçün uzunluğu T olan intervalda onun dəyişməsini öyrənmək kifayətdir.

tan θ -nin dəyişməsini hansı aralıqda öyrənmək məqsədəuyğun olardı?

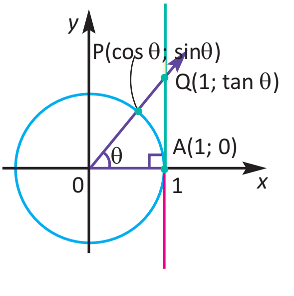
7) tan θ $\theta = 90^o$ və $\theta = -90^o$ olduqda təyin olunmayıb, $(-90^o; 90^o)$ aralığında təyin olunmuşdur.

Cədvəli doldurun və tangens funksiyasının qrafikini qurun.

Bucağın ölçüsü	–70°	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°	70°
toxunan üzərindəki nöqtənin ordinatı									

8) y = tan θ funksiyasının qrafikini qrafkalkulyatorla da qurun.

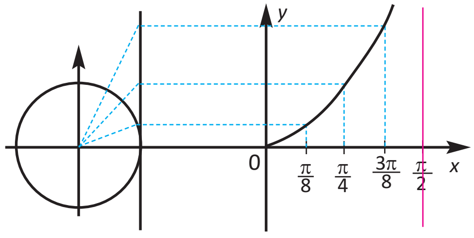
y = tan x funksiyası

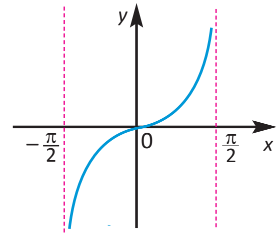


Şəkildən göründüyü kimi, vahid çevrəyə A(1;0) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın AQ parçasının uzunluğu Q nöqtəsinin ordinatının mütləq qiymətinə bərabərdir. Q nöqtəsinin koordinatları (1; tan θ) kimidir. AQ düz xəttinə tangens xətti deyilir.

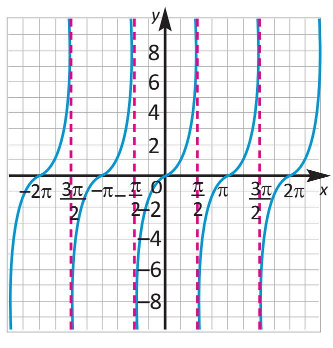
tan 0 = 0 olduğundan y = tan x funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından keçir. x dəyişəni $\dfrac{\pi}{2}$ -dən kiçik qalmaqla ona yaxınlaşdıqca tan x artır və $+\infty$-a yaxınlaşır. $x = \dfrac{\pi}{2}$ şaquli düz xəttinə, eləcə də $x = \dfrac{\pi}{2}\cdot(2k+1)$ $(k \in Z)$ düz xətlərinə y = tan x funksiyasının qrafikinin şaquli asimptotları deyilir.

Vahid radiuslu çevrənin I rübünü və $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığını 4 bərabər hissəyə bölək və tangenslər xətti üzərində qiyməti uyğun bucaqların tangensinə bərabər olan parçalar quraq. Tangenslər xətti üzərində alınmış hər bir nöqtədən *Ox* oxu üzərində absisi uyğun bucağın qiymətinə bərabər olan nöqtədən qaldırılmış perpendikulyarı kəsənə qədər *Ox* oxuna paralellər çəkək. Göstərilən kəsişmə nöqtələrini ardıcıl olaraq səlis xətlə birləşdirsək, $[0; \frac{\pi}{2})$ aralığında $y = \tan x$ funksiyasının qrafikini alarıq. $\tan(-x) = -\tan x$ olduğu üçün, alınmış qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik çevirməklə $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ intervalında $\tan x$-in qrafiki qurulur.





$y = \tan x$ əsas dövrü π olan dövri funksiyadır. Ona görə qurulmuş qrafiki π qədər sağa və sola paralel köçürməklə tangensoid adlanan əyri alırıq.



- $y = \tan x$ funksiyasının təyin oblastı: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, (n \in Z)$
- Funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.
- Tək funksiyadır: $\tan(-x) = -\tan x$
- Funksiyanın əsas dövrü π-yə bərabərdir.
- Funksiyanın maksimumu və minimumu yoxdur.
- Funksiyanın qrafiki x oxunu $x = \pi n, (n \in Z)$ nöqtələrində kəsir
- Funksiya $x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in Z)$ qiymətlərində təyin olunmamışdır. Bu nöqtələrdən keçən və punktirlə çəkilmiş xətlər qrafikin şaquli asimptotlarıdır.
- Funksiya iki qonşu asimptotu arasında artandır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tangens funksiyasının xassələrindən istifadə etməklə hesablayın.

a) $\tan(-\frac{\pi}{4})$ b) $\tan(\frac{5\pi}{4})$ c) $\tan(-\frac{11\pi}{3})$

2. $y = \tan x$ funksiyasının $[-2\pi; 2\pi]$ aralığında qrafikini qurun.

$y = \cot x$ funksiyası

$y = \cot x$ funksiyasının qrafikini qurmaqdan ötrü

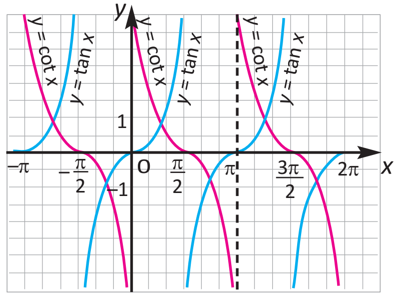
$\cot x = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$ eyniliyindən istifadə edək.

1) $y = \tan x$ tangensoidi absis oxu boyunca $\frac{\pi}{2}$ qədər sola sürüşdürülür.

2) Alınan əyri absis oxuna nəzərən simmetrik əks etdirilir.

$x = \pi n$ olduqda tangensin qiyməti sıfıra brabərdir, kotangens funksiyası isə x-in bu qiymətlərində təyin olunmamışdır:

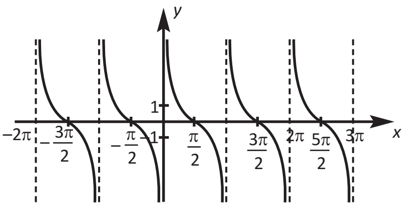
$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$



Qrafikdən göründüyü kimi, tangens və kotangens funksiyalarının qrafiklərinin x oxu ilə kəsişmə nöqtələri (sıfırları) və asimptotları yerini dəyişmişdir.

Əsas xassələri:

y = cot x



- Təyin oblastı $x \neq \pi n$, $(n \in Z)$
- Qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.
- Tək funksiyadır. $\cot(-x) = -\cot x$
- Əsas dövrü π-yə bərabərdir.
- Funksiyanın maksimumu və minimumu yoxdur.
- Funksiyanın qrafiki x oxunu $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $(n \in Z)$ nöqtələrində kəsir.
- Funksiya $x = \pi n$ $(n \in Z)$ qiymətlərində təyin olunmamışdır. Bu nöqtələrdən keçən və punktirlə çəkilmiş xətlər qrafikin şaquli asimptotlarıdır.
- İki qonşu asimptotu arasında azalan funksiyadır.

Öyrənmə tapşırıqları

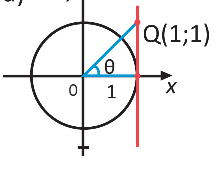
3. Apardığınız araşdırmaya görə aşağıdakı suallara cavab verin.

a) $\alpha = 90°$ və $\alpha = -90°$ olduqda tangens funksiyası təyin olunmamışdır. Bu qrafikdə özünü necə göstərir?

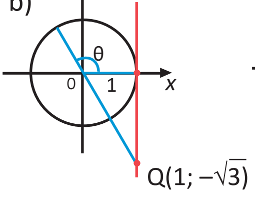
b)Tangens funksiyasının əsas dövrü neçə radian və ya neçə dərəcədir?

4. $\tan\theta$-nı və θ bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

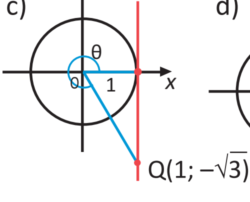
a)



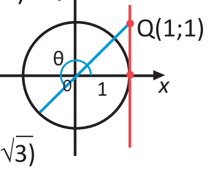
b)



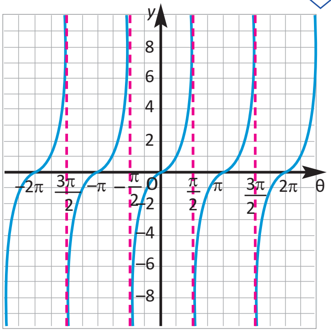
c)



d)



5. $\tan\theta$ funksiyasının qrafikinə görə onun tələb olunan qiymətlərini tapın.



a) $\tan\frac{\pi}{4}$ b) $\tan\frac{3\pi}{4}$ c) $\tan(-\frac{7\pi}{4})$

d) $\tan 0$ e) $\tan\pi$ f) $\tan\frac{5\pi}{4}$

6. Funksiyaların qrafiklərini tələb olunan aralıqda qurun.

a) $y = \tan x \quad -90° < x < 90°$

b) $y = \tan x \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

c) $y = \tan x \quad -90° < x < 270°$

d) $y = \tan x \quad -\pi \le x \le \pi$

7. a) $\alpha = \frac{11\pi}{24}$ olduqda $\tan\alpha \approx 7{,}6$ olduğunu bilərək və tangens funksiyasının əsas dövründən istifadə edərək, bu qiymətə uyğun bucağın daha üç qiymətini yazın.

b) $\alpha = 1{,}25$ olduqda $\tan\alpha \approx 3$ olduğunu bilərək və tangens funksiyasının əsas dövründən istifadə edərək, bu qiymətə uyğun bucağın daha üç qiymətini yazın.

c) $-\pi \le x \le \pi$ aralığında x-in elə iki qiymətini yazın ki, bu qiymətlərdə $y = \tan x$ funksiyası təyin olunmasın.

8. $y = \tan x$ funksiyasının qrafiki x-in $90°$-yə yaxınlaşdığı hissədə sanki şaquli düz xətt formasını alır. Aşağıdakı cədvəllərdə tangensin verilən bucaqlara uyğun qiymətlərini kalkulyatorla hesablayın. θ bucağı $90°$-yə yaxınlaşdıqca tangensin qiyməti necə dəyişir? $90°$-dən uzaqlaşdıqda necə dəyişir?

θ	$\tan\theta$
$89{,}5°$	
$89{,}9°$	
$89{,}999°$	
$89{,}999999°$	

θ	$\tan\theta$
$90{,}5°$	
$90{,}01°$	
$90{,}0001°$	
$90{,}000001°$	

9. Hər bir funksiyanın $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında: a) sıfırlarını; b) şaquli asimptotlarını tapın.

1) $y = \tan x$ 2) $y = \cot x$

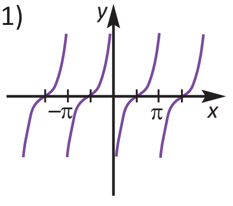
10. $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında x-in elə üç qiymətini yazın ki, bu qiymətlərdə
a) kotangens; b) tangens funksiyası təyin olunmasın.

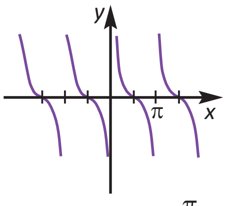
11. $y = \tan x$, $y = \cot x$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Qrafiklərə görə onların tək və ya cüt olduqlarını izah edin. Bu fikri cəbri yazılışlarla da göstərin.

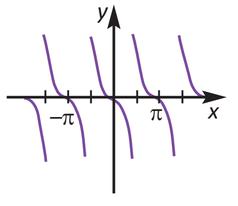
12. Funksiyaların qrafiklərini qurun.

$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad y = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

13. Hansı qrafik hansı funksiyaya aiddir?

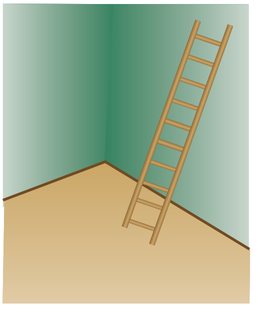
1) 

2) 

3) 

a) $y = \cot x$ b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $y = -\cot x$

14. Nərdivan divardan 3 m aralıdan döşəmə ilə α bucağı əmələ gətirməklə divara söykədilmişdir. Nərdivan divarın h m hündürlüyünə çatır.



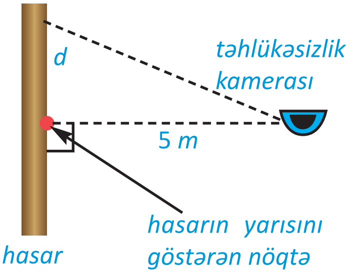
a) h ilə α bucağı arasındakı münasibəti tangens funksiyasının köməyilə yazın.

b) Funksiyanın qrafikini $0° \le \alpha \le 70°$ intervalında qurun.

c) α bucağının böyüməsi ilə h hündürlüyü necə dəyişir?

d) $\alpha = 90°$ olduqda nə baş verir?

15. Hasarı müşahidə altında saxlayan təhlükəsizlik kamerası hasarın yarısında götürülmüş nöqtədən 5 m məsafədə quraşdırılmışdır. Kameranın fırlanaraq bir tam dövrə vurması 60 saniyə çəkir.



a) Kameranın hasarın ortasından başlayaraq hasar boyu izlədiyi d uzunluğunun zamandan asılılıq funksiyasını tangens funksiyası ilə ifadə edin. Kameranın hasarın orta nöqtəsini izlədiyi vaxtı başlanğıc, $t = 0$ qəbul edin.

Göstəriş: Kamera bir tam dövrdə 360° dönür. Bir saniyədə neçə dərəcə döndüyünü tapın.

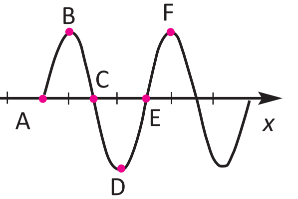
b) Bu funksiyanın $-15 < t < 15$ intervalında qrafikini qurun.

c) $t = 10$ san olduqda hasarın hansı hissəsi izlənmiş olacaq ?

d) $t = 15$ olduqda nə baş verəcək?

1. Qrafik üzərində qeyd edilmiş nöqtələr x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini, maksimum və minimum qiymətləri göstərir.

a) Qrafik $y = 2\sin 3x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, A nöqtəsinin koordinatları (0; 0) olarsa, B, C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.



b) Qrafik $y = 3\cos 2x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, B nöqtəsinin koordinatları (0; 3) olarsa, A,C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

c) Qrafik $y = \sin\frac{1}{2}x$ funksiyasının qrafikinə uyğun olub, A nöqtəsinin koordinatları $(-2\pi; 0)$ olarsa, B, C, D, E, F nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

2. Təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğu $\{x \mid x \in R\}$, qiymətlər çoxluğu $[-3; 3]$ parçası olmaqla iki müxtəlif sinus və kosinus funksiyası yazın.

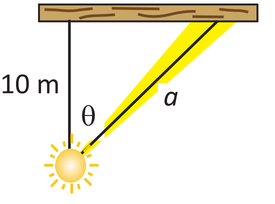
3. Funksiyaların: a) əsas dövrünü tapın; b) qrafikini qurun.

1) $y = 6\sin\frac{2}{3}x$ 2) $y = 3\cos\frac{1}{2}x$ 3) $y = \frac{1}{2}\cot 2x$ 4) $2y = \tan 2x$

4. 10 m aralıda qoyulmuş mənbədən binanın üzərinə vurulmuş reklam yazısı işıqlandırılır.

a) a məsafəsinin θ bucağından asılılığını triqonometrik funksiya ilə ifadə edin.

b) Cədvəli a-nın qiymətlərini ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla doldurun.



θ	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$
a				

c) Cədvəldən göründüyü kimi, θ-nın qiymətləri bərabər addımlarla artır. a-nın qiymətləri haqqında da bu fikri demək olarmı?

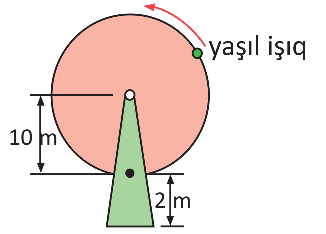
d) $0 \le \theta \le \frac{4\pi}{9}$ olarsa, mənbə lövhənin ən çox nə qədər hissəsini işıqlandırır?

5. a) Sinusoidin minimumu (18; 44), maksimumu (30; 68) nöqtəsində yerləşir. Bu funksiyanın amplitudunu tapın.

b) Bir dövr ərzində sinusoid maksimumu (4; 12) nöqtəsində, minimumu isə (12; –2) nöqtəsində alır. Bu funksiyanın əsas dövrünü tapın.

c) Uzunluğu dövrə bərabər olan parçada sinusoidin maksimumu $(\pi;7)$, minimumu $\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ nöqtəsində yerləşir. Bu funksiyanın düsturunu $y = d + a \cdot \cos bx$ şəklində yazın.

6. Karuselin üzərindəki yaşıl işığın fırlanma mərkəzinə görə istənilən anda yerdən məsafəsini triqonometrik funksiya ilə modelləşdirin. $t = 0$ olduqda yaşıl işığın ən aşağı səviyyədə olduğunu qəbul edin. Karusel bir tam dövrəni 100 saniyəyə başa vurur.



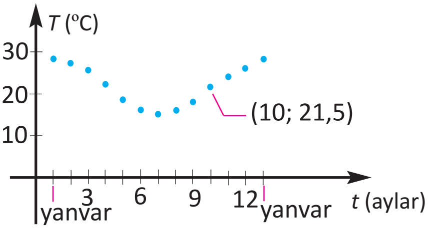
7. **Suyun dərinliyi.** Cədvəldə gecə yarısından günortaya qədər dənizin çimərlik hissəsində suyun dərinliyinin dəyişməsi haqqında məlumat verilmişdir.
a) Suyun dərinliyinin dəyişməsini $y = d + a \cdot \cos(bt + c)$ funksiyası ilə modelləşdirin.
b) Səhər saat 7-dən saat 9-a qədər dərinlik nə qədər dəyişmişdir?

Vaxt, t	Dərinlik, y
Gecə yarısı	3,2
02:00	9
04:00	11,9
06:00	9
08:00	3,2
10:00	0,3
Günorta	3,2

8. **Temperatur dəyişməsi.** Cənubi Afrika ölkələrinin iqlimi tropik və subtropik iqlimdir. Yer kürəsinin bu hissəsində iyun-avqust qış aylarıdır. Cədvəldə Cənubi Afrikada yerləşən Keyp Taun (Cape Town) şəhərində bir il ərzində aylar üzrə maksimum temperatur verilmişdir.

Aylar	Yanv.	Fev.	Mart	Apr.	May	Iyun	Iyul	Avq.	Sent.	Okt.	Noyabr	Dek.
Temperatur (°C)	28	27	25	22	18,5	16	15	16	18	21,5	24	26

Yanvar ayını $t = 1$, fevralı $t = 2$ və s., qəbul etməklə ayları üfüqi ox üzərində, temperaturu isə şaquli ox üzərində qeyd etməklə cədvələ görə qrafik qurulmuşdur. Cədvəli və qrafiki dəftərinizə köçürün. Yanvar ayından başlayaraq aylıq orta temperaturun təxminən yenə 12 aydan bir təkrarlanacağını bilərək, bu qrafiki növbəti 12 ay üçün davam etdirin.



9. Dalğaların qaldırıb-endirməsi nəticəsində gəminin şaquli yerdəyişməsini (metrlə) $d = 0{,}6 \sin \pi t$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada t vaxtı (saniyə ilə) göstərir. Bu funksiyanın dövrünü və amplitudunu göstərin, qrafikini qrafkalkulyatorla qurun.

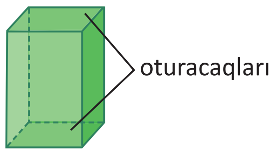
10. **Açıq tipli tapşırıq.** Amplitudu $\frac{1}{2}$, əsas dövrü π olan triqonometrik funksiya yazın və qrafikini qurun.

6 Çoxüzlülər

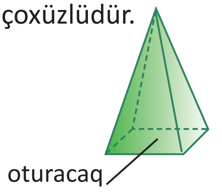
Çoxüzlülər

Çoxüzlü - səthi sonlu sayda müstəvi fiqurlardan - çoxbucaqlılardan ibarət olan cisimdir. Çoxüzlünü hüdudlandıran çoxbucaqlılara onun **üzləri** deyilir. Çoxüzlünün ən azı 4 üzü var. Üzlərin kəsişməsindən alınan düz xətt parçaları çoxüzlünün tilləri, tillərin kəsişdiyi nöqtələr isə çoxüzlünün təpələri adlanır.
Çoxüzlünün səthini təşkil edən qonşu çoxbucaqlılar bir müstəvi üzərində deyildir, üç və daha çox üzə aid olan nöqtə təpə nöqtəsidir.

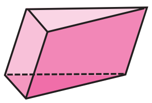
Prizma oturacaq adlanan iki üzü paralel və konqruyent çoxbucaqlı, qalan üzləri isə paraleloqram olan çoxüzlüdür.



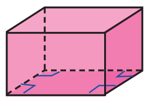
Piramida oturacağı çoxbucaqlı, yan üzləri isə ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür.



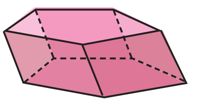
Prizma və piramida oturacaqlarındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır.



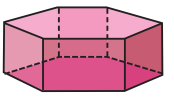
üçbucaqlı prizma



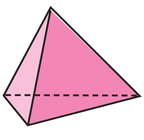
dördbucaqlı prizma



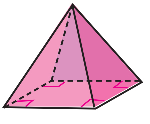
beşbucaqlı prizma



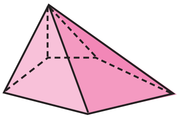
altıbucaqlı prizma



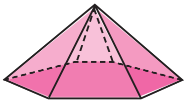
üçbucaqlı piramida



dördbucaqlı piramida

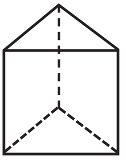


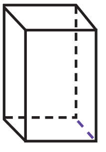
beşbucaqlı piramida

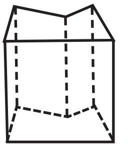


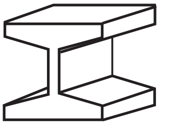
altıbucaqlı piramida

Çoxüzlülər qabarıq və çökük olmaqla iki növə ayrılır. Çoxüzlü səthindəki hər bir müstəvi çoxbucaqlının müstəvisinə görə bir tərəfdə yerləşərsə, ona qabarıq çoxüzlü deyilir. Şəkildə A və B qabarıq, C və D fiqurları çökük çoxüzlüdür.

A. 

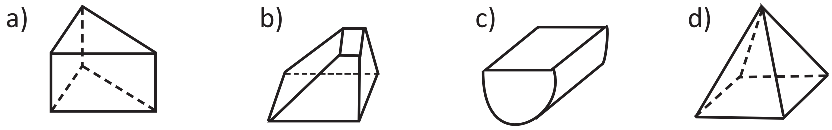
B. 

C. 

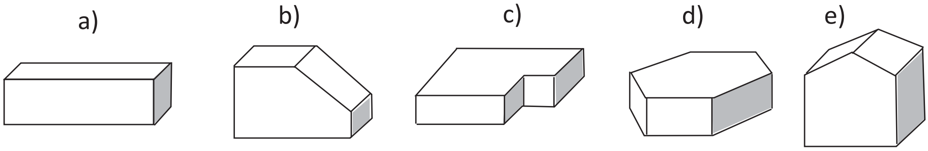
D. 

Öyrənmə tapşırıqları.

1. Fiqurlardan hansılarına çoxüzlü demək olar?

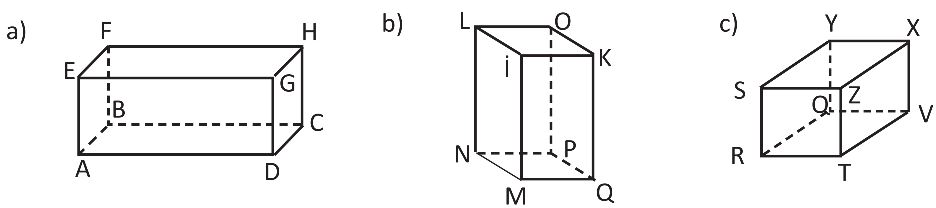


2. Hər bir çoxüzlünün üzlərinin, təpələrinin, tillərinin sayını müəyyən edin.



Çoxüzlü	a)	b)	c)	d)	e)
Üzlərinin sayı					
Tillərinin sayı					
Təpələrinin sayı					

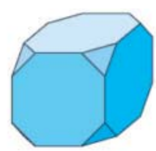
3. Şəkildə verilən düzbucaqlı paralelepipedlərə görə yazın:
a) konqruyent tillərini; b) paralel tillərini;
c) konqruyent üzlərini; d) paralel üzlərini;
e) perpendikulyar üzlərini.



Eyler düsturu

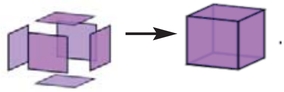
Eyler teoreminə görə istənilən qabarıq çoxüzlünün üzlərinin (F),təpələrinin (V) və tillərinin (E) sayı arasında $F + V = E + 2$ kimi asılılıq mövcudur.
Yəni, qabarıq çoxüzlünün üzlərinin və təpələrinin sayları cəmi onun tillərinin sayından 2 vahid çoxdur.

Nümunə. Çoxüzlünün 14 üzü var. Üzlərdən 8-i üçbucaq, 6-sı səkkizbucaqlı (oktaqon) formalıdır. Bu çoxüzlünün neçə təpəsi var?



Həlli. 8 üçbucaq, 6 səkkizbucaqlının tərəflərinin sayı $8 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 72$. Lakin hər til iki üzün kəsişdiyi parçadır, yəni hər iki üzə aid olan bir ortaq tərəf var. Deməli, tillərin sayı $72 : 2 = 36$ olacaq. Eyler düsturuna görə təpələrin sayını tapa bilərik:
$F + V = E + 2$; $14 + V = 36 + 2$; $V = 24$.
Cavab: Çoxüzlünün 24 təpəsi var.

Məsələn, kubu təşkil edən kvadratların ümumilikdə 24 tərəfi , kubun isə cəmi 12 tili var.



4. Verilən məlumatlara əsasən çoxüzlülərin təpələrinin sayını Eylər düsturundan istifadə etməklə hesablayın.

a) 12 üzü var. Bütün üzləri üçbucaqdır.

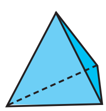
b) 26 üzü var. 8-i üçbucaq, 18-i kvadratdır.

c) 14 üzü var. 8-i üçbucaq, 6-sı kvadratdır.

Düzgün çoxüzlülər

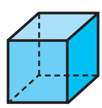
Bütün üzləri konqruyent düzgün çoxbucaqlılar olan və hər bir təpəsindən eyni sayda til çıxan qabarıq çoxüzlüyə düzgün çoxüzlü deyilir. Məsələn, kub düzgün çoxüzlüdür.
Bu fiqurlara platonik fiqurlar da deyilir. Platonik fiqurların tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr kimi 5 növü var.

düzgün tetraedr



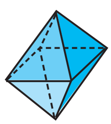
Hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 4 üzü var.

kub



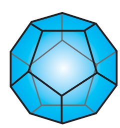
Hər biri kvadrat olan 6 üzü var.

düzgün oktaedr



Hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 8 üzü var.

düzgün dodekaedr

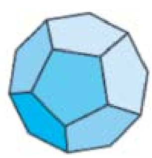


Hər biri düzgün beşbucaqlı olan 12 üzü var, 20 təpəsi, 30 tili var.

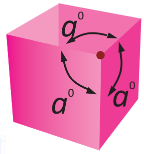
düzgün ikosaedr

Hər biri bərabərtərəfli üçbucaq olan 20 üzü, 12 təpəsi, 30 tili var.

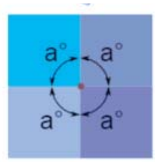
5. Ləman tili 4 sm olan düzgün beşbucaqlılardan 12 üzü olan çoxüzlü quraşdırdı. Ləman bu çoxüzlüdən tilləri boyu led-işıq məftili çəikməklə lampa düzəltməyi planlaşdırır. Bunun üçün ən azı neçə santimetr uzunluqda işıq teli lazımdır?



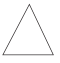
Araşdırma. Platonik fiqurun üzü düzgün altıbucaqlı ola bilərmi?



Nə üçün platonik fiqurların üzləri üçbucaq, kvadrat və beşbucaqlı olmaqla yalnız 5 növü var?
Çoxüzlülərdə ortaq təpəli çoxbucaqlıların həmin təpədəki daxili bucaqlarının cəmi 360°-dən kiçik olmalıdır, əks halda üçölçülü fiqur alınmaz.



Bu fikri düzgün çoxbucaqlıların daxili bucaqlarının dərəcə ölçüsündən istifadə etməklə hər bir platonik fiqur üçün yoxlayın.

Düzgün üçbucağın  bir daxili bucağı 60° .

Bir təpədəki bucaqların cəmi:

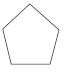
Ortaq təpəli 3 üçbucaq: (3 × 60° = 180°)

4 üçbucaq: ________________

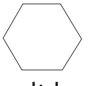
5 üçbucaq: _________________

Kvadratın  bir daxili bucağı ___ .

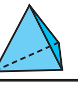
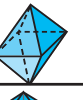
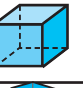
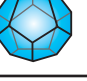
Ortaq təpəli 3 kvadrat: __________________

Düzgün beşbucaqlının  bir daxili bucağı ___ .

Ortaq təpəli 3 düzgün beşbucaqlı: ________________

Düzgün altıbucaqlının  bir daxili bucağı ___ .

Ortaq təpəli 3 düzgün altıbucaqlı : _____________

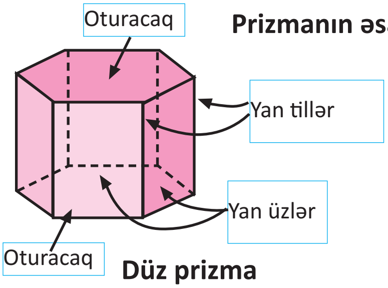
Ortaq təpəli çoxbucaqlılar	Bucaqların cəmi 360°-dən <-dir	Adı	Şəkli
3 üçbucaq	180°		
4 üçbucaq			
5 üçbucaq			
3 kvadrat			
3 beşbucaqlı			

Prizmalar

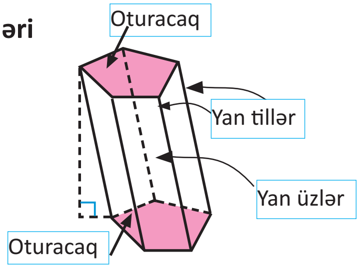
Paralel müstəvilər üzərində yerləşən və paralel köçürmədə üst-üstə düşən iki konqruyent çoxbucaqlı və bu çoxbucaqlıların uyğun nöqtələrini birləşdirən bütün parçalardan ibarət fiqur prizma adlanır. Çoxbucaqlılara ***prizmanın oturacaqları***, oturacaqların uyğun təpələrini birləşdirən düz xətt parçalarına prizmanın ***yan tilləri*** deyilir. Yan tillərdən keçən müstəvi hissəyə ***prizmanın yan üzləri*** deyilir. Pirizmanın yan üzləri paraleloqramlardır. Bu paraleloqramların hər birinin iki tərəfi oturacaqların uyğun tərəfləri, digər iki tərəfi isə uyğun yan tillərdir.

Yan tilləri oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan prizmalar ***düz prizma***, perpendikulyar olmayanlar isə ***mail prizma*** adlanır.

Prizmanın əsas elementləri



Düz prizma

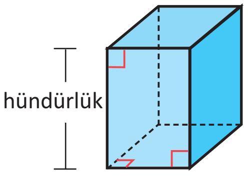


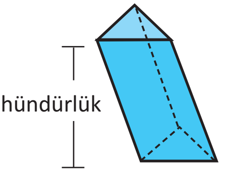
Mail prizma

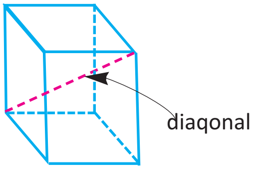
Düz prizmanın bütün yan üzləri düzbucaqlılardan ibarətdir.
Oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan düz prizmaya düzgün prizma deyilir.

Prizmanın oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə onun ***hündürlüyü*** deyilir. Düz prizmanın yan tili onun hündürlüyünə bərabərdir.

Prizmanın eyni üzündə olmayan iki təpəsini birləşdirən düz xətt parçasına onun ***diaqonalı*** deyilir.

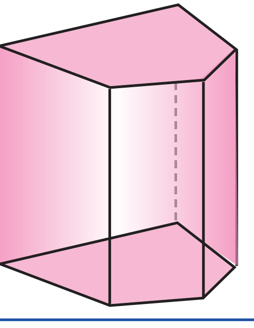




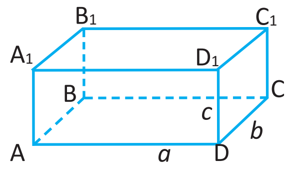


Prizmanın oturacaqları n-bucaqlıdırsa, ona n-bucaqlı prizma deyilir.
n-bucaqlı prizmanın $2n$ sayda təpə nöqtəsi, $n + 2$ sayda üzü, $3n$ sayda tili var.

Məsələn, şəkildəki prizmanın oturacağı beşbucaqlıdır. Deməli, onun 10 təpə nöqtəsi, 7 üzü, 15 tili var.



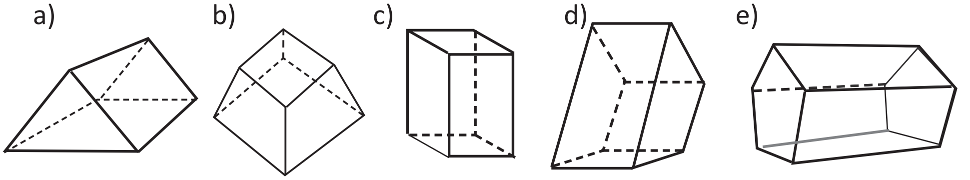
Oturacağı paraleloqram olan prizmaya paralelepiped deyilir. Paralelepipedin qarşı üzləri paralel və konqruyentdir. Oturacağı düzbucaqlı olan düz paralelepipedə düzbucaqlı paralelepiped deyilir. Şəkildə ABCDA′B′C′D′ düzbucaqlı paralelepipeddir. Düzbucaqlı paralelepipedin bir təpəsindən çıxan üç tilinin uzunluqları onun ölçülərini göstərir.



Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildəki fiqurlardan hansı prizma deyil? Fikrinizi əsaslandırın.

a) b) c) d) e)

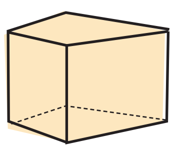


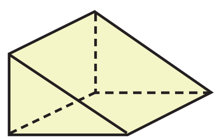
2. 1) Tələb edilən ölçülərdə fiqurlar çəkin.

a) $3\times4\times3$ ölçüdə düzbucaqlı paralelepiped

b) Tilinin uzunluğu 5 vahid olan kub.

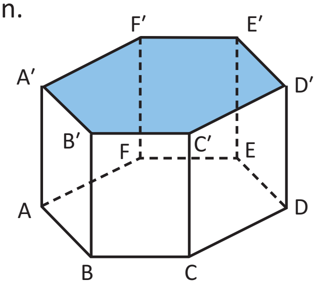
2) www.geogebra.org vasitəsilə oturacağı ixtiyari çoxbucaqlı olan prizmalar çəkin.





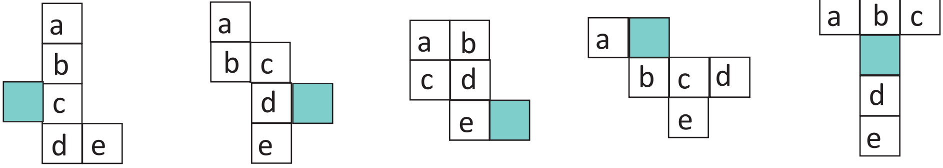
3. Düzgün altıbucaqlı prizmaya görə suallara cavab verin.

a) Prizmanın üzülərinin, tillərinin və təpə nöqtələrinin sayını yazın.
b) Prizmanın üzlərinin adlarını yazın.
c) Hansı üz A′ABB′ üzünə paraleldir?
d) Hansı tillər prizmanın oturacağına perpendikulyardır?

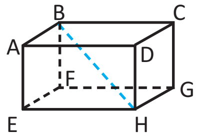


4. Kubun açılış şəkillərinə görə rəngli üzün qarşısındakı üzü müəyyən edin.

a) b) c) d) e)



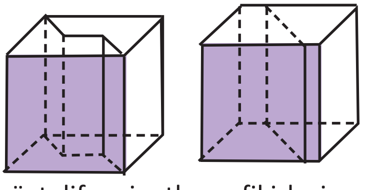
5. Şəkildə göstərilən düzbucaqlı paralelepipedə görə tapşırıqları yerinə yetirin.



a) ABC və EHG üzlərindəki B və H təpələrini birləşdirən diaqonalı çəkilmişdir. Digər mümkün diaqonalları çəkin və hansı üzlərdəki təpələri birləşdirdiyini yazın.

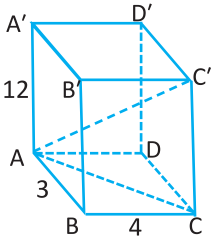
b) Prizmanın perpendikulyar olan hər hansı iki üzünü göstərin və cavabınızı müxtəlif teoremlərə və ya tərifə görə əsaslandırın.

6. a) Kub şəkildəki kimi iki bərabər prizmaya müxtəlif cür ayrılmışdır. Alınan prizmaların rəngli üzü üstündə qoyulmuş vəziyyətdə şəklini çəkin.

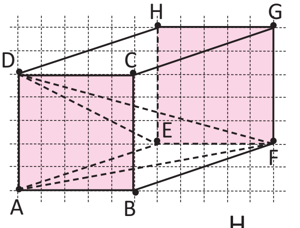


b) Siz də kubu iki bərabər hissəyə ayırmanın müxtəlif variantlarını fikirləşin.

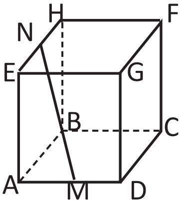
7. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri 3×4×12 vahid kimidir. Oturacağın AC diaqonalını və paralelepipedin AC′ diaqonalını tapın.



8. Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipedin iki qarşı yan üzü tərəfləri 4 sm olan kvadratlardır. AE tili 7 sm-dir. DF-in uzunluğunu tapın.



9. Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipeddə EN = NH , AM = MD, DC = 6 sm, FC = 12 sm və EG = 8 sm olduğuna görə MN-i tapın.



10. Verilmiş üç ölçüsünə görə düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalını tapın.
a) 6; 8; 24 b) 12; 16; 21

11. Hər tili *a* və oturacağının iti bucağı 60° olan düz paralelepipedin diaqonallarını tapın.

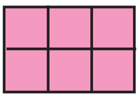
12. Düz paralelepipedin yan tili 5 sm, oturacağı isə tərəfləri 6 sm və 8 sm, diaqonallarından biri 12 sm olan paraleloqramdır. Paralelepipedin diaqonallarını tapın.

Kub konstruksiyalar

Kublarla müxtəlif konstruksiyalar quraşdırmaq olar. Konstruksiyaların müxtəlif tərəflərdən görünüşlərinin (planlarının) çəkilməsi və ya əksinə, müxtəlif görünüşlərin planına görə konstruksiyanın quraşdırılması böyük praktiki əhəmiyyət daşıyır.

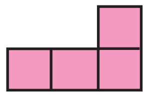
Praktik məşğələ. Kub konstruksiyanın yuxarıdan, öndən və yandan görünüşləri verilmişdir. Verilən görünüşlərə görə fiquru quraşdırın və təsvir edin.

Yuxarıdan görünüş



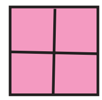
Yuxarıdan görünüşdən istifadə etməklə fiqurun oturacağını quraşdıraq.

Yandan görünüş

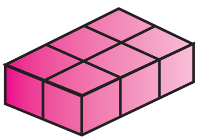


Yandan görünüşdən istifadə etməklə quraşdırmanı tamamlayaq

Öndən görünüş

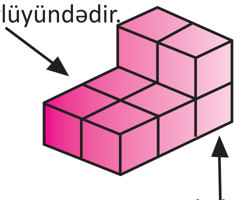


Öndən görünüşlə konstruksiyanın doğruluğunu yoxlayaq.



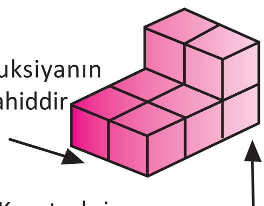
Oturacaq ölçüləri 2×3 vahid (kubla) olan düzbucaqlı formasındadır.

1-ci və 2-ci cərgə 1 kub hündürlüyündədir.



3-cü cərgə 2 kub hündürlüyündədir.

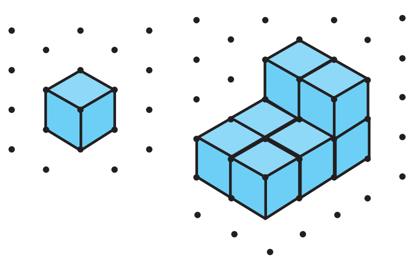
Konstruksiyanın eni 2 vahiddir



Konstruksiyanın hündürlüyü 2 vahiddir

Üçölçülü fiqurları təsvir etmək üçün izometrik nöqtəli vərəqlər əlverişlidir. Məsələn, kubun vahidə bərabər tilləri nöqtələr arasındakı vahid məsafəyə bərabərdir. Kubun təpələrini qeyd edib və ardıcıl birləşdirməklə onun üçölçülü görüntüsünü almaq olar.

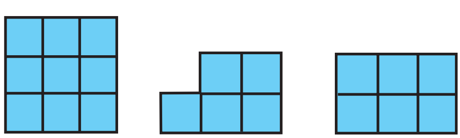
Oxşar qayda ilə konstruksiyanı təşkil edən bütün kublar çəkilir.



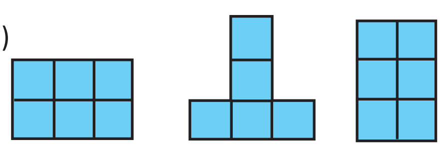
Öyrənmə tapşırıqları

1. Müxtəlif tərəflərdən görünüşlərə görə konstruksiyaları kublardan quraşdırın və izometrik nöqtəli vərəqdə təsvirini çəkin.

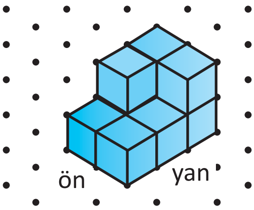
a)



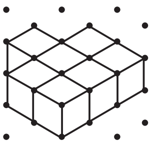
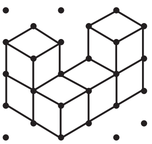
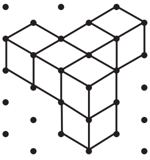
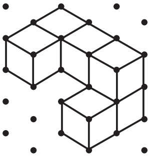
b)



2. Şəkildəki konstruksiyanın hansı görünüşü: *yuxarıdan, yandan,* yoxsa *öndən* görünüşü konsturksiyanın eyni hündürlüklü olmadığını müəyyən etməyə imkan verir? Çəkin, göstərin.

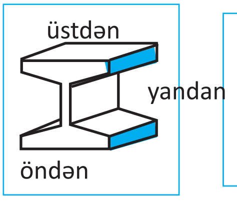


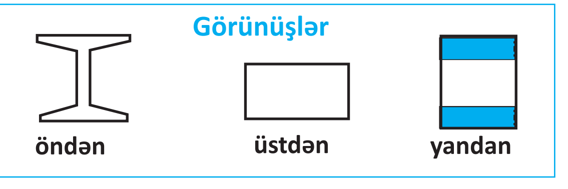
3. Hər bir konstruksiyanı çəkin. Konstruksiyaların yuxarıdan, öndən və yandan görünüşlərini çəkin.

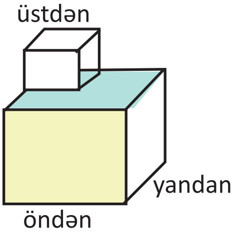
a) 
c) 
b) 
d) 

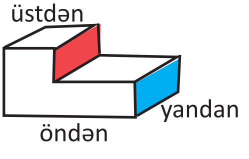
4. Konstruksiyaların öndən, yandan və üstdən görünüşlərini çəkin.

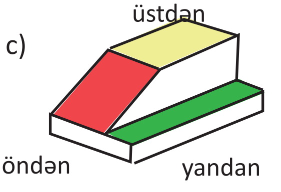
Nümunə.





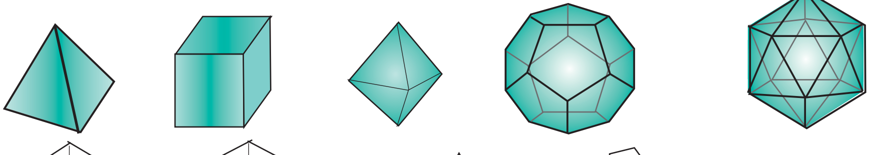
a) 

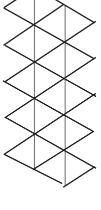
b) 

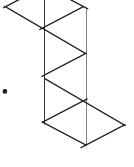
c) 

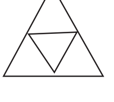
5. Hər bir çoxüzlüyə uyğun açılış şəklini müəyyən edin.

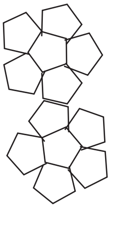
düzgün tetraedr | kub | düzgün oktaedr | düzgün dodekaedr | düzgün ikosaedr

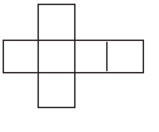


A. 

B. 

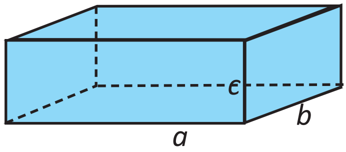
C. 

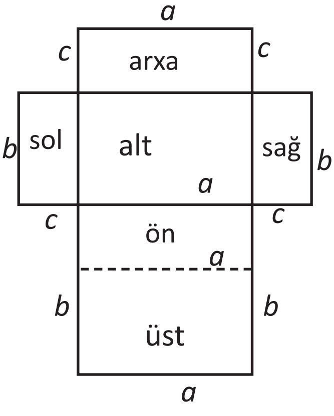
D. 

E. 

Prizmanın səthinin sahəsi

Araşdırma 1. Ölçüləri a, b, c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.





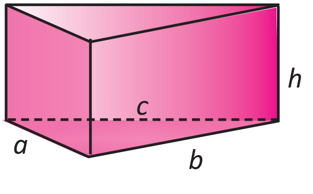
Paralelepipedin açılışı cüt-cüt konqruyent düzbucaqlılar olmaqla 6 düzbucaqlıdan ibarətdir. Paralelepipedin tam səthini hesablamaq üçün onun üzlərinin sahələrini hesablayaq.

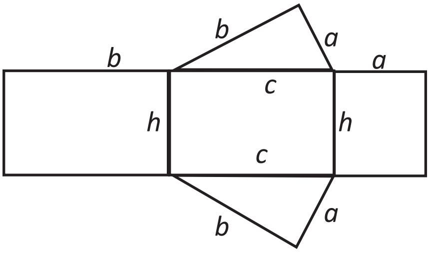
Üzlər	Sahəsi
1. Sol və sağ:	$bc + bc = 2bc$
2. Üst və alt:	$ab + ab = 2ab$
3. Ön və arxa:	$ac + ac = 2ac$

Bütün üzlərin sahələri cəmi: $S = 2ab + 2bc + 2ac$

Uzunluğu a, eni b, hündürlüyü c olan düzbucaqlı paralelepipedin tam səthinin sahəsi $\mathbf{S = 2(ab + ac + bc)}$ düsturu ilə hesablanır.

Araşdırma 2. Hündürlüyü h və oturacağındakı üçbucağın tərəfləri a, b, c olan düz üçbucaqlı prizmanın yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayın.





Prizmanın açılış şəkilini çəkək.

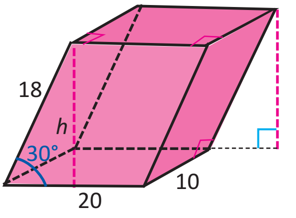
Prizmanın yan səthi üç düzbucaqlıdan ibarətdir. Bu düzbucaqlıların sahələri cəmi prizmanın yan səthinin sahəsinə bərabərdir:

$ah + bh + ch = (a + b + c)h = Ph$

Burada P oturacaqdakı üçbucağın perimetridir.

Prizmanın tam səthinin sahəsi yan səthinin sahəsi ilə oturacaqları təşkil edən iki üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir. Prizmanın tam səthini tapmaq üçün oturacaqlarının sahələrini tapmalıyıq. Prizmanın oturacaqları bu halda üçbucaqlardır və bu üçbucaqların sahələri Heron düsturu ilə hesablana bilər.

Araşdırma 3. Mail prizma oturacaqları, tərəfləri 10×20 olan iki düzbucaqlıdan, iki yan üzü (sağ və sol) ölçülərindən biri 10, digəri isə 18 olan konqruyent düzbucaqlılardan, digər iki yan üzü (ön və arxa) isə ölçüləri 20 və 18, iti bucağı 30^o olan paraleloqramlardan ibarətdir. Verilən ölçülərinə görə pirizmanın tam səthinin sahəsini tapın.



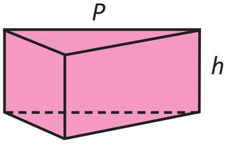
Əvvəlcə prizmanın paraleloqram şəkilli ön və arxa üzlərinin sahəsini tapmaq üçün prizmanın hündürlüyünü tapaq.

$$\sin 30° = \frac{h}{18} \qquad h = 9$$

Ön və arxa üzlərinin sahələri cəmi: $2 \cdot 20 \cdot 9 = 360$ (kv vahid)
Sağ və sol üzlərinin sahələri cəmi: $2 \cdot 10 \cdot 18 = 360$ (kv vahid)
Oturacaqların sahələri cəmi: $2 \cdot 20 \cdot 10 = 400$ (kv vahid)
Prizmanın tam səthi: $360 + 360 + 400 = 1120$ (kv vahid)

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi

Düz prizmanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə hündürlüyü (yan tili) hasilinə bərabərdir.



$$\boldsymbol{S_{yan} = Ph}$$

Burada *P* oturacağın perimetri, *h* prizmanın hündürlüyüdür.

Prizmanın tam səthinin sahəsi

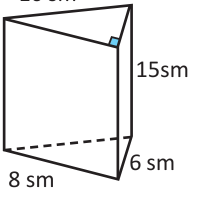
Prizmanın tam səthinin sahəsi oturacaqları ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir.

$$\boldsymbol{S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan}}$$

Düz prizmanın tam səthinin sahəsi $\boldsymbol{S_{tam} = 2S_{ot} + Ph}$ düsturu ilə hesablanır.

Nümunə. Düz prizmaların tam səthinin sahəsini hesablayın.

a) Oturacaqları düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizmanın tam səthinin sahəsini tapaq.



$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2S_{ot} + Ph$

$2S_{ot} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$ (sm^2)
$S_{yan} = Ph = (10 + 8 + 6) \cdot 15 = 360$ (sm^2)
$S_{tam} = 48 + 360 = 408$ (sm^2)

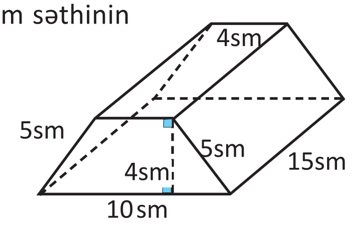
b) Oturacaqları trapesiya olan düz prizmanın tam səthinin sahəsini tapaq.

$S_{tam} = 2S_{ot} + S_{yan} = 2S_{ot} + Ph$

$2S_{ot} = 2 \cdot (\frac{1}{2}(10 + 4) \cdot 4) = 56$ (sm²)

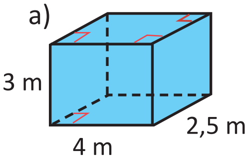
$S_{yan} = Ph = (10 + 5 + 5 + 4) \cdot 15 = 360$ (sm²)

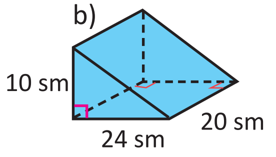
$S_{tam} = 56 + 360 = 416$ (sm²)

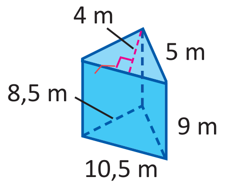


Öyrənmə tapşırıqları

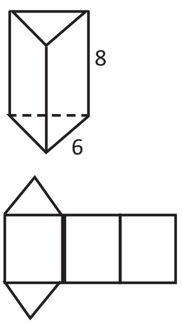
1. Düz prizmaların yan və tam səthlərini hesablayın.

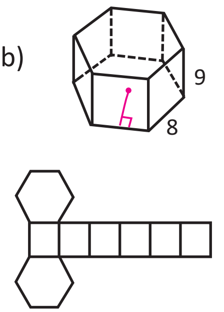
a)


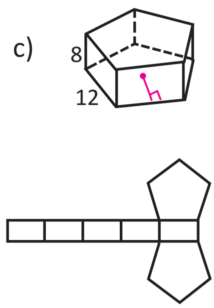
b)


c)


2. Düzgün prizmaları və açılış şəkillərini dəftərinizdə çəkin. Uyğun ölçüləri açılış şəkilləri üzərində yazın. Prizmaların tam səthlərinin sahələrini hesablayın.

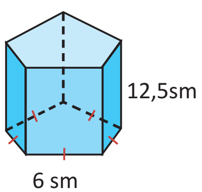
a)


b)


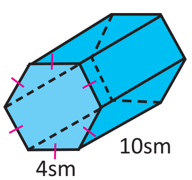
c)


3. Şəkildəki düzgün pirizmaların açılış şəkillərini çəkin, tam səthinin sahəsini tapın.

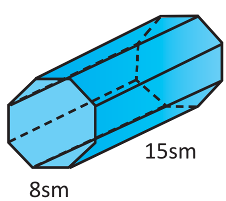
a) Oturacağı düzgün beşbucaqlıdır.



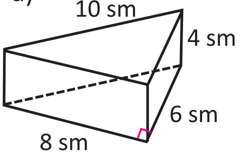
b) Oturacağı düzgün altıbucaqlıdır.

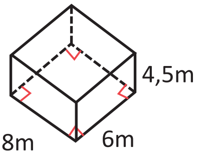


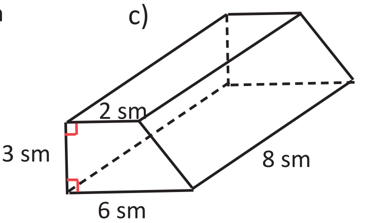
c) Oturacağə düzgün səkkizbucaqlıdır.



4. Düz prizmanın açılış şəkillərini ölçüləri ilə çəkin. Tam səthinin sahəsini müstəvi üzlərin sahələri cəmi kimi tapın.

a)


b)


c)


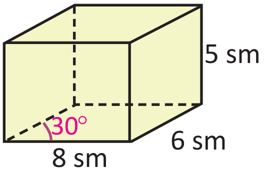
5. Verilənlərə görə düz prizmaların şəklini çəkin və tam səthinin sahəsini hesablayın.

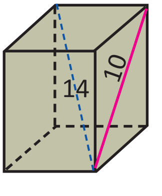
Prizmanın oturacağı	Prizmanın hündürlüyü
a) tərəfləri 8 vahid olan bərabərtərəfli üçbucaq	10 vahid
b) tərəfləri 13; 14; 15 vahid olan üçbucaq	12 vahid
c) tərəfləri 12; 10; 10 vahid olan bərabəryanlı üçbucaq	7 vahid
d) tərəfləri 10; 5; 4; 5 vahid olan bərabəryanlı trapesiya	20 vahid
e) diaqonalları 8 və 6 vahid olan romb	10 vahid
f) tərəfi 8 vahid olan düzgün altıbucaqlı	11 vahid

6. Tillərinin uzunluğu 3 : 7 : 8 nisbətində olan düzbucaqlı paralelepipedin səthinin sahəsi 808 sm^2-dır. Tillərin uzunluqlarını tapın.

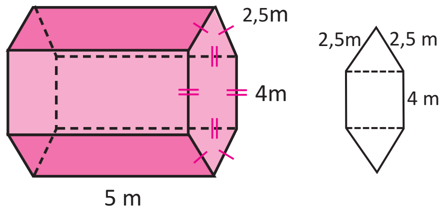
7. Düz paralelepipedin oturacağının 6 sm və 8 sm olan tərəfləri 30°-li bucaq əmələ gətirir. Yan tilinin 5 sm olduğunu bilərək, paralelepipedin tam səthinin sahəsini tapın.

8. Diaqonalı 14 vahid, yan üzünün diaqonalı isə 10 vahid olan düzgün dördbucaqlı prizmanın hündürlüyünü və oturacağının sahəsini tapın.

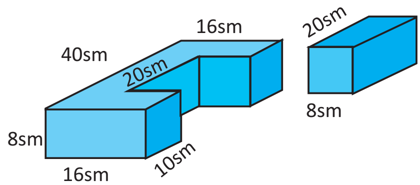




9. Düz prizmanın verilən ölçülərinə görə tapın:
a) oturacağının sahəsini;
b) yan səthinin sahəsini;
c) tam səthinin sahəsini.

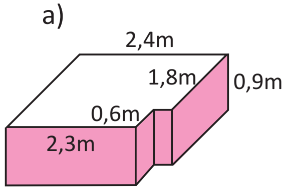


10. Düzbucaqlı paralelepiped şəkilli taxtadan şəkildə göstərilən hissə kəsilib çıxarılmışdır. Qalan hissə və kəsilib çıxarılan hissə yenidən bütünlüklə rənglənməlidir.
a) Kəsilib çıxarılan hissənin tam səthinin sahəsini tapın.
b) Qalan hissənin tam səthinin sahəsini tapın.
c) 200 ml boya ilə təxminən bir kvadrat metr hissəni rəngləmək mümkündürsə, bu hissələrin rənglənməsi üçün nə qədər boya lazım olar?

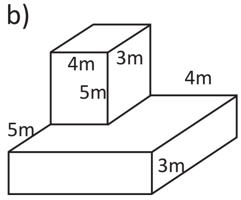


11. Düzbucaqlı paralelepipedlərdən kəsilib çıxarılmaqla alınmış fiqurların tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

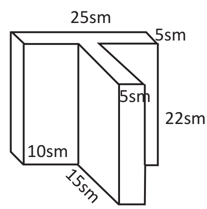
a)



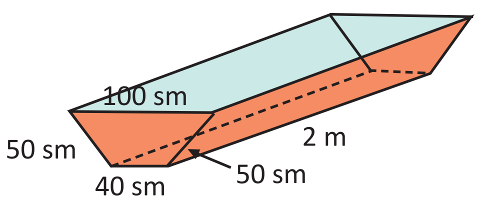
b)



c)

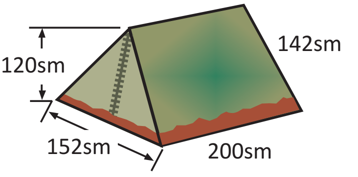


12. a) Hikmət atları suvarnaq üçün oturacağı trapesiya şəkilli olan düz prizma formalı su qabı düzəltməyi planlaşdırır. Verilən ölçüdə qab düzəltmək üçün ona ən azı nə qədər material lazımdır?

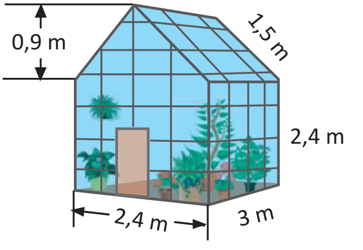


b) Hündürlüyü 6 m olan düz prizmanın oturacaqları bərabəryanlı trapesiyalardır. Trapesiyanın oturacaqları 2 m və 8 m, yan tərəfləri 5 m-dir. Prizmanın tam səthinin sahəsini tapın. Uyğun prizmanı çəkin və verilən ölçülərini üzərində yazın.

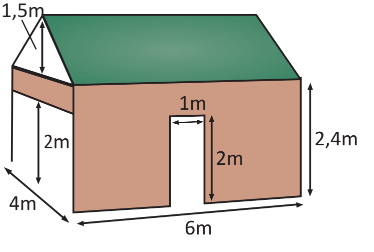
13. Şəkildəki çadıra ən azı neçə kvadrat metr parça işlədilmişdir?



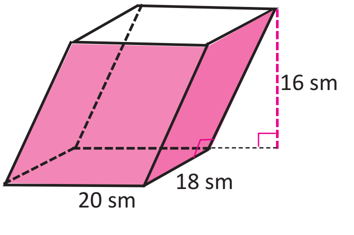
14. Şəkildəki qış bağının divarları və damı şəffaf plastik lövhələrlə örtülməlidir. Qapının sahəsinin 1,8 m^2 olduğunu bilərək, verilən ölçülərə görə qış bağını örtmək üçün neçə kvadrat metr lövhə lazım olduğunu hesablayın.



15. Ölçüləri şəkildəki kimi verilən qarajın divarlarını və dam örtüyünü rəngləmək planlaşdırılır.
30 m^2 sahəni rəngləmək üçün təxminən 4,5 *l* boya işlədilir.
a) Şəkildəki qarajın divarlarını iki dəfə rəngləmək üçün təxminən neçə litr boya lazımdır?
b) Şəkildəki qarajın damını iki dəfə rəngləmək üçün təxminən neçə litr boya lazımdır? Qarajın damının ön tərəfdən açıq olduğunu nəzərə alın.



16. Mail prizmanın oturacağı tərəfləri 20 sm və 18 sm olan düzbucaqlıdır. Yan üzlərdən ikisi paraleloqram, ikisi isə kvadratdır. Prizmanın hündürlüyü 16 sm olarsa, tam səthinin sahəsini hesablayın.



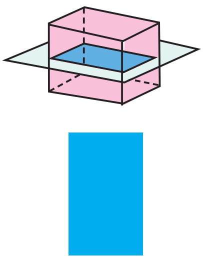
17 Mail prizmanın oturacağı, tərəfləri 6 sm və 4 sm olan düzbucaqlıdır. Yan üzlərindən ikisi ölçüləri 6 sm × 8 sm olan düzbucaqlılar, digər iki yan üz isə ölçüləri 4 sm × 8 sm, iti bucağı 30° olan paraleloqramdır. Mail prizmanın hər üzünün sahəsini hesablamaqla tam səthinin sahəsini tapın.

18. Mail üçbucaqlı prizmanın yan tilləri arasındakı məsafələr 4 sm, 6 sm və 8 sm-dir. Prizmanın yan tili 5 sm-dir. Prizmanın yan səthinin sahəsini tapın.

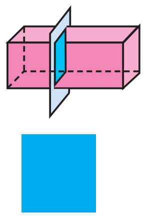
Prizmanın müstəvi kəsikləri

Prizmaların müstəvi ilə kəsişməsi nəticəsində onun üzərində qalan iz müstəvi kəsiyinin formasını müəyyən edir. Prizmanın üzlərinin müstəvi ilə kəsişməsindən alınan parçaları qurmaqla kəsiyi təsvir etmək olar. Şəkildə düzbucaqlı paralelepipedin müstəvi kəsikləri təsvir edilmişdir.

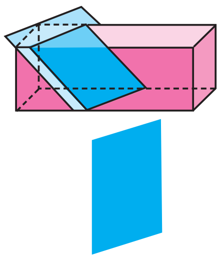
Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır.**



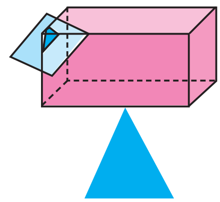
Oturacağa perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsi. **Düzbucaqlı alınır.**



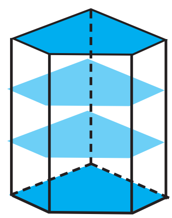
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə qarşı üzləri kəsən müstəvi. **Paraleloqram alınır.**



Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə bir təpədən çıxan tilləri kəsən müstəvi. **Üçbucaq alınır**.



Diqqət edin! Müstəvi kəsiyi dedikdə ayrılan hissə deyil, fiqurun üzərində qalan iz nəzərdə tutulur.



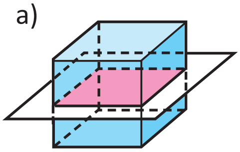
Prizmanın yan tillərinə perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsindən alınan çoxbucaqlıya onun perpendikulyar kəsiyi deyilir. Prizmanın oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsiyi oturacaqlara konqruyent çoxbucaqlıdır.

Prizmanın eyni üzə aid olmayan iki yan tilindən keçən kəsiyə diaqonal kəsiyi deyilir.
n-bucaqlı prizmanın diaqonal kəsiklərinin sayı $\frac{n(n-3)}{2}$ -yə bərabərdir. Diaqonal kəsiklərinin hər biri paraleloqram olduğundan alınır ki, n bucaqlı prizmanın $n(n-3)$ sayda diaqonalı var.

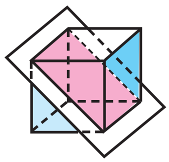
Öyrənmə tapşırıqları

1. Kubun şəkildə göstərilən müstəvi ilə kəsişməsindən hansı çoxbucaqlı alınır?

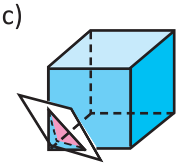
a)



b)

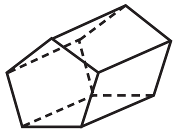


c)

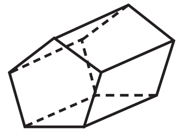


2. Hər bir prizmanın uyğun müstəvi ilə kəsişməsini çəkib göstərin. Kəsişmədən alınan çoxbucaqlının növünü müəyyən edin.

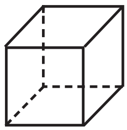
a) Oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə



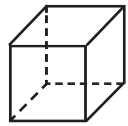
b) Oturacaq müstəvisinə perpendikulyar müstəvi ilə



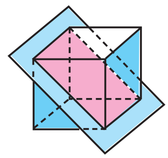
c) Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə bir təpədən çıxan üç tili kəsən müstəvi ilə



d) Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq əmələ gətirməklə ön və arxa üzləri kəsən müstəvi ilə



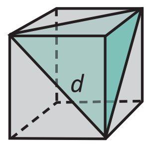
3. 1) Tili 6 sm olan kubun şəkildə göstərilən müstəvi kəsiyinin perimetrini tapın.



2) Kub bir təpədən çıxan üç tilin uclarından keçən müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsikdə hansı fiqur alınır?

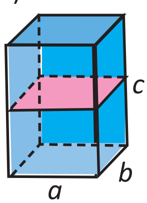
a) Kubun tili 1 sm olarsa, *d* parçasının uzunluğunu tapın.

b) Kubun tili $3\sqrt{2}$ sm olarsa, müstəvi kəsiyinin perimetrini tapın.

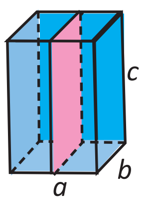


4. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri verilib: $a = 9$ sm, $b = 12$ sm, $c = 16$ sm. Hər bir müstəvi kəsiyindən alınan fiqurun perimetrini və sahəsini hesablayın.

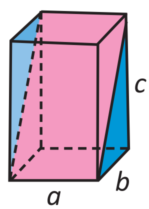
a)



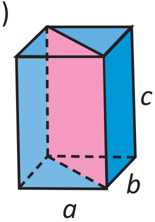
b)



c)



d)



5. Düzbucaqlı paralelepipedin oturacağının tərəfləri 7 sm və 24 sm, paralelepipedin hündürlüyü isə 8 sm-dir. Diaqonal kəsiyinin sahəsini tapın.

6. Düzgün altıbucaqlı prizma verilmişdir.

a) Ən böyük diaqonal kəsiyinin sahəsi 2 sm^2-dır. Prizmanın yan səthini tapın.

b) Bu prizmanın neçə diaqonalı var?

7. Oturacağı romb olan düz prizmanın diaqonal kəsiklərinin sahələri 42 sm^2 və 56 sm^2-dır. Bu prizmanın yan səthinin sahəsini tapın.

8. Diaqonalları 8 sm və 5 sm, hündürlüyü 2 sm olan düz prizmanın oturacağı rombdur. Yan səthinin sahəsini tapın.

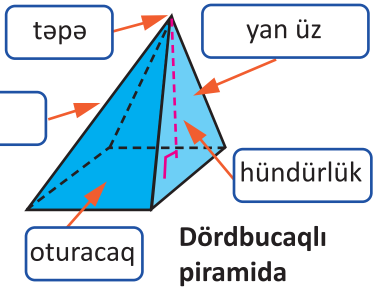
Piramida

Piramida bir üzü çoxbucaqlı, qalan üzləri ortaq təpəli üçbucaqlar olan çoxüzlüdür.

Ortaq təpəli üçbucaqlar piramidanın yan üzləri, çoxbucaqlı isə oturacağıdır.
Yan üzlərin ortaq tərəflərinə yan tillərdir.

Yan üzlərdəki üçbucaqların ortaq təpəsi piramidanın təpəsi adlanır.

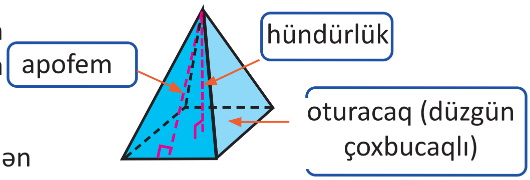
Piramidanın təpəsindən oturacaq müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyara piramidanın hündürlüyü deyilir.



Dördbucaqlı piramida

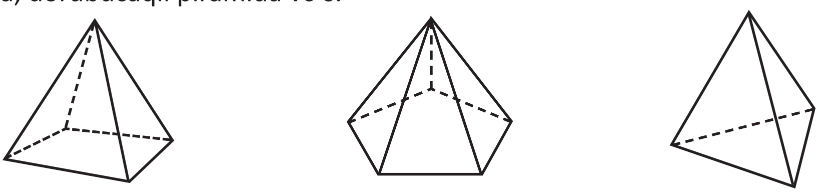
Oturacağı düzgün çoxbucaqlı və hündürlüyünün oturacağı bu çoxbucaqlının mərkəzi ilə üst-üstə düşən piramidaya düzgün piramida deyilir.

Düzgün piramidanın yan üzündə təpədən oturacağın tərəfinə çəkilmiş hündürlük apofem adlanır.



Düzgün dördbucaqlı piramida

Piramida oturacağındakı çoxbucaqlının adı ilə adlandırılır. Məsələn, üçbucaqlı piramida, dördbucaqlı piramida və s.

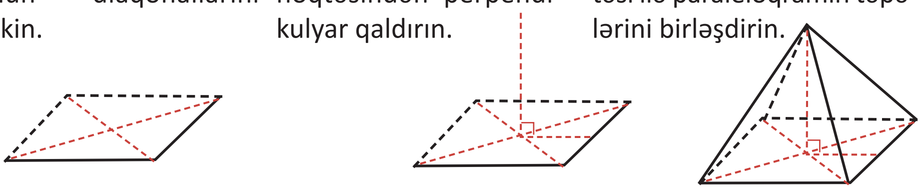


Dördbucaqlı piramida **Beşbucaqlı piramida** **Üçbucaqlı piramida**

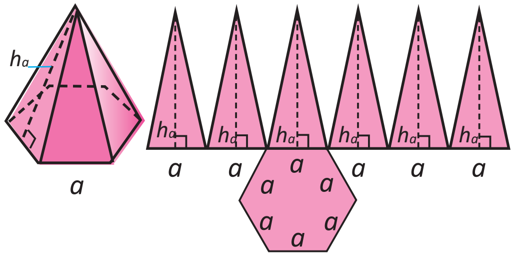
Düzgün piramidanın yan tilləri konqruyentdir.
Düzgün piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı üçbucaqlardır.
Üçbucaqlı piramidaya tetraeder də deyilir. *Tetra* yunanca dörd deməkdir, yəni 4 üzü (hər biri üçbucaq formasında) olan çoxüzlü.

Xüsusi halda dördbucaqlı piramidanı aşağıdakı addımlarla çəkmək olar.

1. Paraleleoqram və onun diaqonallarını çəkin.
2. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsindən perpendikulyar qaldırın.
3. Perpendikulyarın uc nöqtəsi ilə paraleloqramın təpələrini birləşdirin.



Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan üzlərini təşkil edən konqruyent üçbucaqların sahələri cəmidir.
Məsələn, şəkildəki altıbucaqlı piramidanın yan səthinin sahəsi onun yan səthini təşkil edən 6 konqruyent üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir.



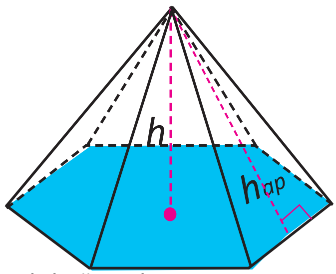
$$S = \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} + \frac{1}{2}ah_{ap} =$$

$$= \frac{1}{2}h_{ap}(a + a + a + a + a + a) = \frac{1}{2}Ph_{ap}; \qquad S = \frac{1}{2}Ph_{ap}$$

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi

Düzgün piramidanın yan səthinin sahəsi oturacağındakı çoxbucaqlının perimetri ilə piramidanın apofemi hasilinin yarısına bərabərdir.

$$\mathbf{S_{yan} = \frac{1}{2}Ph_{ap}}$$



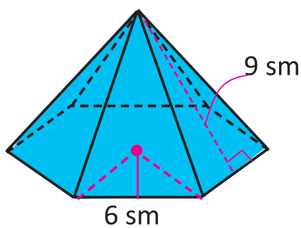
Burada P oturacağın perimetrini, h_{ap} piramidanın apofemini göstərir.
Piramidanın tam səthinin sahəsi oturacağı ilə yan səthinin sahələri cəminə bərabərdir. $\mathbf{S_{tam} = S_{yan} + S_{ot}}$

Nümunə 1. Düzgün altıbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfinin uzunluğu 6 sm-dir. Apofemi 9 sm olarsa, piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

Həlli:

Verilir: $a = 6$ sm, $h_{ap} = 9$ sm

Tapın: $S_{tam} = ?$



$S_{yan} = \frac{1}{2}Ph_{ap} = \frac{1}{2} \cdot 6\,a\,h_{ap} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 162$ (sm²)

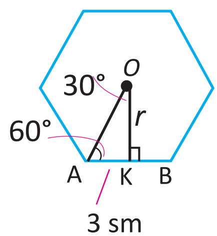
Oturacağın sahəsini tapmaq üçün əvvəlcə düzgün altıbucaqlının apofemini (r) tapmalıyıq. $S_{ot} = \frac{1}{2}Pr$

Düzgün altıbucaqlının mərkəzi bucağı: 360° : 6 = 60°.

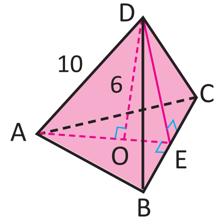
Onda $\angle AOK = 30°$.

$r = 3\tan 60° = 3\sqrt{3}$; $S_{ot} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} \approx 93,5$ (sm²)

$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot} \approx 162 + 93,5 = 255,5$ (sm²)



Nümunə 2. Düzgün üçbucaqlı piramidanın yan tilləri 10 sm, hündürlüyü 6 sm-dir. Piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.



Həlli:

Verilir: AD = 10 sm, DO = 6 sm

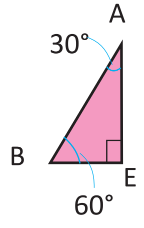
Tapın: S_{tam} = ?

Piramidanın yan səthini tapmaq üçün oturacağın perimetrini və apofemi tapmalıyıq. Perimetri tapmaq üçün isə düzgün üçbucağın bir tərəfini tapmaq kifayətdir.

ΔADO-dan $AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (sm)

Məlumdur ki, $AO = \frac{2}{3}AE$ (izah edin); $\frac{2}{3}AE = 8$ (sm); $AE = 12$ sm

ΔAEB-nin bucaqları 30°, 60°, 90° olduğundan (izah edin)



$BE = \frac{AE}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$; $BC = 2 \cdot BE = 8\sqrt{3}$; $P = 3 \cdot BC = 24\sqrt{3}$

ΔDOE-dən apofemi tapaq. $OE = 12 - 8 = 4$ (sm)

$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$S_{yan} = \frac{1}{2} Ph_{ap} = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 24\sqrt{39}$ (sm²)

$S_{ot} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 12 = 48\sqrt{3}$ (sm²)

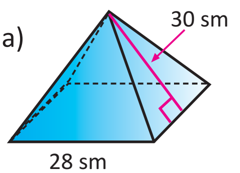
$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot} = 24\sqrt{39} + 48\sqrt{3} \approx 150 + 83 = 233$ (sm²)

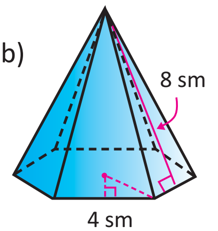
Öyrənmə tapşırıqları

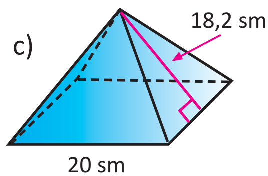
1. Piramidanın oturacağı tərəfləri 6 sm və 8 sm olan düzbucaqlıdır. Piramidanın yan tillərinin hər biri 13 sm olarsa, hündürlüyünü tapın.

2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın hündürlüyü 7 sm, oturacağının tərəfi 8 sm-dir. Yan tilini tapın.

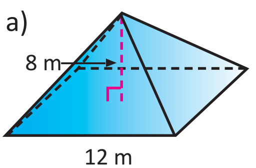
3. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların yan səthlərinin sahəsini hesablayın.

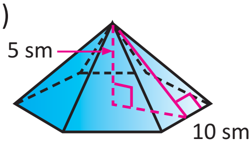
a) 

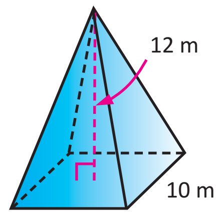
b) 

c) 

4. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların yan səthlərinin sahələrini hesablayın.

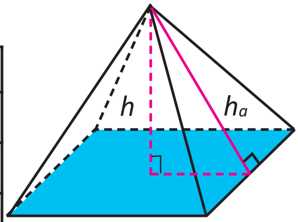
a) 

b) 

c) 

5. Cədvəldə verilənlərə görə düzgün dördbucaqlı piramidanın tələb olunan ölçülərini tapın.

Hündürlük	6	12	24	?	?	6
Apofem	10	15	?	13	5	?
Oturacağın tərəfi	?	?	14	?	8	?
Yan səthi	?	?	?	624	?	320



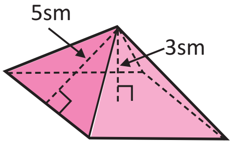
6. Verilən ölçülərə görə düzgün piramidaları çəkin və yan səthinin sahəsini tapın:

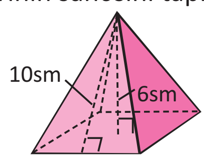
a) oturacağının tərəfi 6 vahid, yan tili 5 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramida;

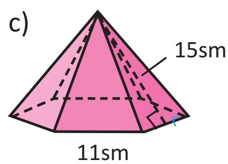
b) oturacağının tərəfi 4 vahid, apofemi 6 olan düzgün üçbucaqlı piramida;

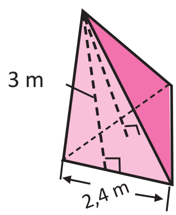
b) oturacağının tərəfi 10 vahid, yan tili 13 vahid olan düzgün altıbucaqlı piramida.

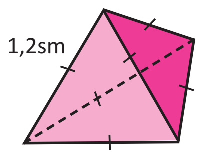
7. Düzgün piramidaların yan səthlərinin sahəsini tapın.

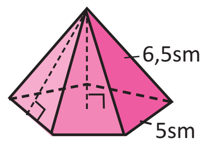
a) 

b) 

c) 

d) 

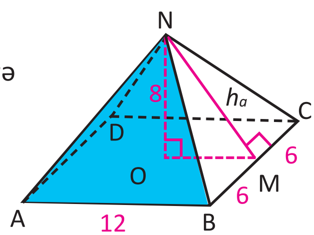
e) 

f) 

8. Düzgün dördbucaqlı piramidada verilənlərə görə tələb edilənləri tapın.

a) OM   b) h_a c) NC

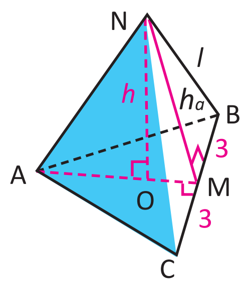
d) $S_{\Delta NBC}$ e) S_{yan} f) S_{tam}



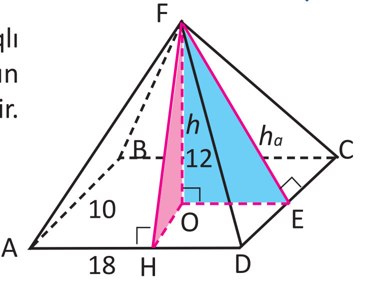
9. Düzgün tetraedrdə verilənlərə görə tələb edilənləri tapın.

a) OM   b) h_a c) NC

d) $S_{\Delta NBC}$ e) S_{yan} f) S_{tam}



10. Tərəfləri 10 və 18 vahid uzunluğunda olan düzbucaqlı piramidanın oturacağıdır. O nöqtəsi düzbucaqlının mərkəzidir. Piramidanın hündürlüyü FO = 12 vahiddir.
a) FH və FE-ni tapın;
b) Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.
$S_{yan} = \frac{1}{2} Ph_a$ düsturunu tətbiq etmək olarmı?



11. Piramidanın oturacağı tərəfləri 9 sm və 5 sm olan düzbucaqlıdır. Yan tillərdən biri 12 sm olub, oturacaq müstəvisinə perpendikulyardır. Bu piramidanın yan səthini tapın.

12. Evin dam örtüyü dördbucaqlı piramida şəklindədir. Piramidanın oturacağı tərəfləri 12 m və 10 m olan düzbucaqlıdır,yan tillərinin hər biri 10 m-dir. Dam örtüyünə neçə kvadrat metr material sərf edilmişdir?

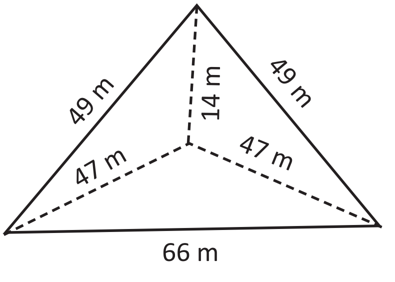
13. Dünyanın böyük şəhərlərinin arxitekturasında piramidaşəkilli tikililər mühüm yer tutur. Bu tikililər arasında qədim abidələr (Misir piramidaları) də, şəhərlərə müasirlik verən yeniləri də var (Parisdə Luvr muzeyinin, Bakıda İçərişəhər metro stansiyasının girişi kimi).
a) Heops və Luvr piramidaları düzgün dördbucaqlı piramidalardır. Verilən ölçülərinə görə hər birinin yan səthinin sahəsini hesablayın.

Heops piramidası. Misir
Oturacağın tərəfi 230 m, apofemi 186 m

Luvr piramidası. Paris
Oturacağın tərəfi 35 m, apofemi 28 m

b) Şəkildə İçərişəhər metro stansiyasının piramidaşəkilli girişinin planı verilmişdir. Planda verilmiş ölçülərə görə piramidanın yan səthinin sahəsini hesablayın.

İçərişəhər metro stansiyası



14. Üçbucaqlı piramidanın yan tilləri 4 sm, 6 sm və 8 sm olub, cüt-cüt perpendikulyardır. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

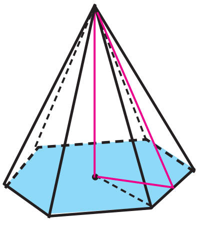
15. a) Piramidanın apofemi hündürlüyündən kiçik deyil. Bu fikri əsaslandırın.

b) Oturacağının tərəfi 10 sm, yan tili 13 sm olan düzgün dördbucaqlı piramidanın hündürlüyünü və apofemini tapın.

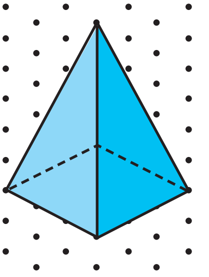
c) Piramidanın oturacağı diaqonanlları 12 sm və 16 sm olan rombdur. Yan üzlər oturacaq müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirərlərsə, bu pramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

16. Piramidanın oturacağı tərəfləri 6 sm, 6 sm, 8 sm olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Yan tillərinin hər birinin uzunluğu 5 sm-dir. Piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

17. Düzgün altıbucaqlı piramidanın bir yan üzünün sahəsi $8\sqrt{3}$, oturacağının sahəsi isə $24\sqrt{3}$ kvadrat vahiddir. Piramidanın:
a) oturacağının tərəfinin uzunluğunu;
b) apofemini;
c) yan tilinin uzunluğunu;
d) hündürlüyünü tapın.



18. Düzgün dördbucaqlı piramida üzərində araşdırma.
a) İzometrik nöqtəli vərəqdə şəkildə verildiyi kimi oturacağının tərəfi 3 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramida çəkin.
b) Piramidanın yan səthinin sahəsini onun apofemi 3 və 9 olan hallar üçün hesablayın, cədvəl tərtib edin.
c) Oturacağın ölçülərini dəyişmədən apofemin uzunluğunun 3 dəfə artması ilə yan səthin sahəsinin necə dəyişdiyini yazın.
d) Həm oturacağın tərəfi, həm də apofem 3 dəfə artsa, yan səth necə dəyişər?



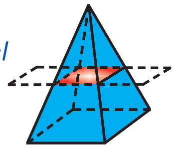
19. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 6 sm, yan tilin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi bucaq 45°-dir. Piramidanın yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

20. Piramidanın oturacağı yan tərəfləri 10 sm, oturacağı 12 sm olan bərabəryanlı üçbucaqdır. Yan üzlərin oturacaq müstəvisi ilə əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucağın dərəcə ölçüsü 60°-dir. Piramidanın apofemini və hündürlüyünü tapın.

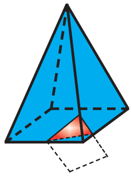
Piramidanın müstəvi kəsikləri

Piramidanın müstəvi ilə kəsiyində müxtəlif formalı çoxbucaqlılar yaranır. Aşağıdakı düzgün dördbucaqlı piramidanın müxtəlif müstəvi kəsikləri təsvir olunmuşdur.

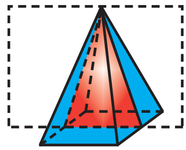
Oturacağına paralel müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə kvadrat alınır.



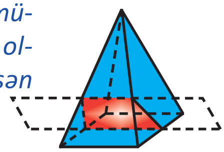
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq altında olmaqla bir təpədə birləşən qonşu üzləri kəsən müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə üçbucaq alınır.



Təpədən keçməklə oturacağına perpendikulyar müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə bərabəryanlı üçbucaq alınır.



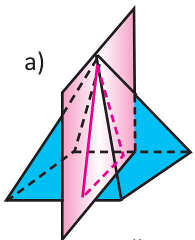
Oturacaq müstəvisi ilə müəyyən bucaq altında olmaqla qarşı üzləri kəsən müstəvi ilə kəsişməsi. Kəsikdə trapesiya alınır.



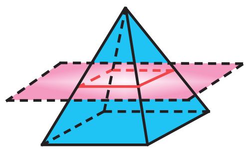
Öyrənmə tapşırıqları

1. Piramida və müstəvinin kəsişməsini sözlə yazın.

a)

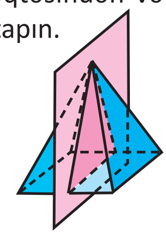


b)

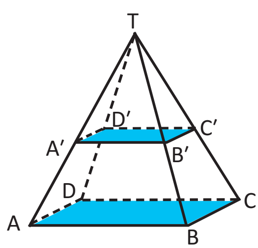


2. a) Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 14 sm, yan tilinin uzunluğu 10 sm-dir. Diaqonal kəsiyinin (piramidanın təpə nöqtəsindən və oturacağın diaqonalından keçən müstəvi ilə kəsiyinin) sahəsini tapın.

b) Hündürlüyü 12 vahid, oturacağının tərəfi 8 vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın iki qarşı yan üzünün apofemlərindən keçən müstəvi kəsiyinin sahəsini tapın.



3. Aşağıdakı təkliflərin doğruluğunu isbat edin.
Piramidanı oturacağa paralel müstəvi ilə kəsdikdə:
1) bu müstəvi piramidanın yan tillərini və hündürlüyünü mütənasib hissələrə bölür;
2) Kəsikdə alınan çoxbucaqlı oturacağa oxşar olur;
3) Kəsiyin və oturacağın sahələri nisbəti onların təpədən olan məsafələrinin kvadratları nisbətinə bərabər olur.
İsbat üçün plan. ABT və A'B'T kimi üçbucaqların oxşarlıqlarından istifadə edin.

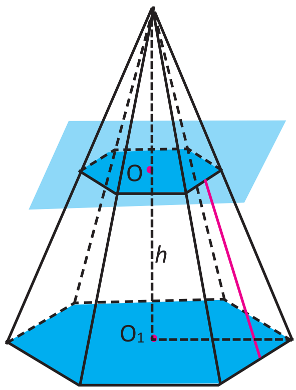


4. Piramidanın hündürlüyü 4 bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələrindən oturacağa paralel müstəvilər keçirilmişdir. Oturacağın sahəsinin 400 m^2 olduğunu bilərək, alınan kəsiklərin sahələrini tapın.

5. Piramidanın hündürlüyü 16 sm, oturacağın sahəsi 512 sm^2-dir. Sahəsi 50 sm^2 olan, oturacağa paralel kəsiyin oturacaq müstəvisindən məsafəsini tapın.

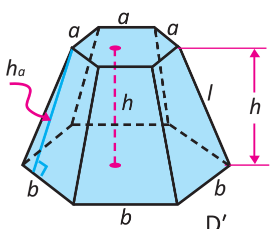
Kəsik piramida

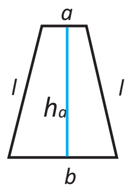
Piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə bu müstəvi ilə piramidanın oturacağı arasında qalan çoxüzlüyə kəsik piramida deyilir.
Kəsik piramidanın paralel üzləri onun oturacaqları, qalan üzləri isə yan üzləridir. Oturacaq müstəvilərinə perpendikulyar olan düz xəttin bu müstəvilər arasında qalan parçasına kəsik piramidanın hündürlüyü deyilir.
Düzgün piramidanı oturacağına paralel müstəvi ilə kəsdikdə alınan kəsik piramida da düzgün kəsik piramidadır. Düzgün kəsik piramidanın yan üzləri konqruyent bərabəryanlı trapesiyalardır. Bu trapesiyaların hündürlüyü düzgün kəsik piramidanın apofemidir.



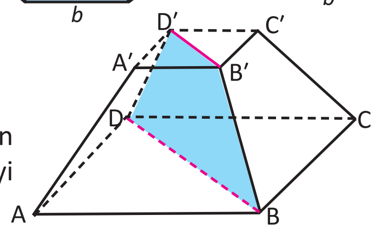
Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi $S_{yan}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)\cdot h_a$ düsturu ilə tapılır. Burada P_1 və P_2 düzgün kəsik piramidanın oturacaqlarının perimetrləri, h_a - apofemdir. Kəsik piramidanın tam səthinin sahəsi isə yan səthinin, alt və üst oturacaqların sahələri cəmi kimi tapılır.

$$S_{tam} = S_{yan} + S_{alt} + S_{üst}$$



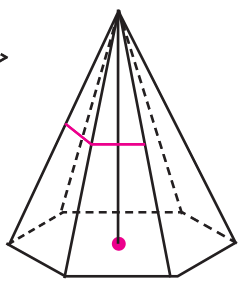


Kəsik piramidanın bir üzündə olmayan iki yan tilindən keçən müstəvi kəsiyi onun diaqonal kəsiyi adlanır.

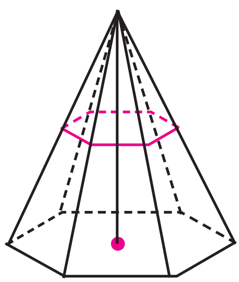


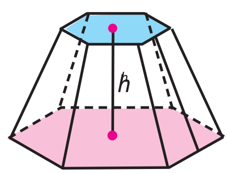
Kəsik piramidanı aşağıdakı addımlarla çəkmək olar.

1) Piramidanın oturacağındakı çoxbucaqlını çəkin.



2) Çoxbucaqlının mərkəzinə müəyyən uzunluqda perpendikulyar çəkin və təpəsini oturacağın təpələri ilə birləşdirin.





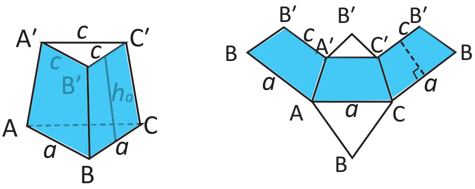
3) Piramidanın istənilən tili üzərində bir nöqtədən başlayaraq oturacağın tərəflərinə paralel parçalarla piramidanın digər oturacağını çəkin. Yan tillərin təpədən kiçik oturacağa qədər olan hissələrini silin

6. a) Hündürlüyü 6 sm, oturacaqlarının tərəflərinin uzunluğu uyğun olaraq 4 sm və 6 sm olan düzgün dördbucaqlı kəsik piramida çəkin.

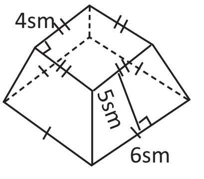
b) Hündürlüyü 8 sm, oturacaqlarının tərəflərinin uzunluğu uyğun olaraq 2 sm və 3 sm olan düzgün altıbucaqlı kəsik piramida çəkin.

c) Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın oturacaqlarının sahələri 36 sm^2 və 64 sm^2-dır. Piramidanın yan tili alt oturacaq müstəvisi ilə 45°-li bucaq əmələ gətirir. Diaqonal kəsiyinin sahəsini tapın.

7. Düzgün kəsik piramidanın yan səthinin sahəsi üçün $S_{yan} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot h_a$ düsturunun doğru olduğunu şəkildə verilən düzgün piramida üzərində göstərin.

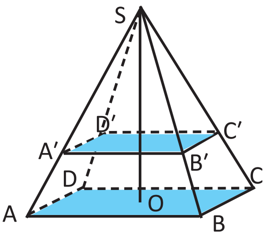


8. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın tam səthinin sahəsini hesablayın.



9. Hündürlüyü 8 sm, oturacağının tərəfi 12 sm olan düzgün dördbucaqlı piramida hündürlüyünün ortasından oturacağa paralel keçən müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsik piramidanın ölçülərini müəyyən edin, şəklini çəkin və tam səthinin sahəsini tapın.

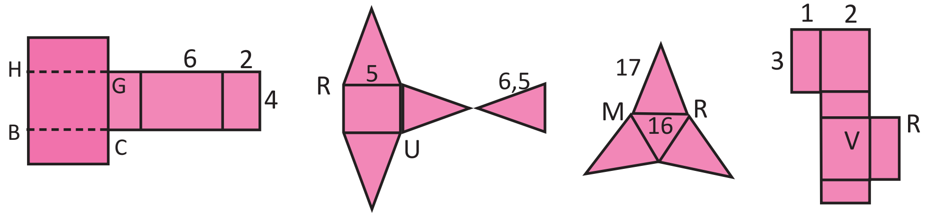
10. Düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının AB tərəfi 12 sm, SO hündürlüyü 8 sm-dir. Piramida oturacaqdan 2 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsik piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.



11. Düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın hündürlüyü 28 sm, apofemi 35 sm-dir. Oturacaqların tərəfləri nisbəti 5:2 kimidir. Kəsik piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

12. Oturacağının tərəfi 30 sm, hündürlüyü 36 sm olan düzgün dördbucaqlı piramida oturacağına paralel müstəvilərlə (təpədən başlayaraq hər 12 sm-dən hündürlüyü boyu) hissələrə bölünmüş, şüşə lövhələr metal çubuqlarla bərkidilərək zinət əşyaları qabı düzəldilmişdir. Bu konstruksiyanı bütünlüklə şüşə ilə örtmək üçün:
a) ən azı neçə kvadrat santimetr şüşə lövhə lazımdır?
b) ən azı neçə santimetr metal çubuq lazımdır?

1. Verilən açılış şəkillərinə və ölçülərinə görə prizma və düzgün piramidaları çəkin. Fiqurların müəyyən təpələri adlandırılmışdır, digərlərini siz adlandırın və tam səthlərinin sahələrini hesablayın.

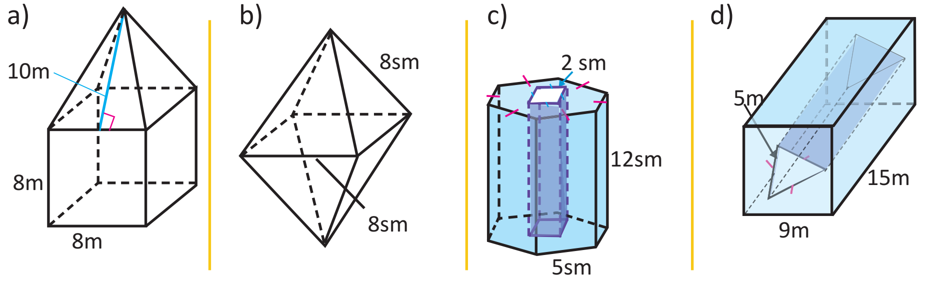


2. Düzgün dördbucaqlı piramidanın əsas ölçüləri oturacağının tərəfi, apofeminin uzunluğu, hündürlüyü, yan səthinin sahəsi və tam səthinin sahəsidir. Verilən iki ölçüyə görə digərlərini tapın.

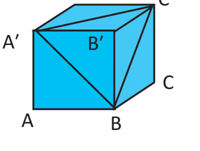
a) a = 3 sm, S_{yan} = 15 sm^2 b) h = 12 m, a = 10 m
c) h_a = 5 m, S_{yan} = 60 m^2 d) S_{yan} = 80 sm^2, S_{tam}= 144 sm^2

3. Futbol topuna 32 üzü olan çoxüzlü kimi baxmaq olar. Üzlərdən 20-si ağ rəngli düzgün altıbucaqlı, 12-si isə qara rəngli düzgün beşbucaqlıdır. Bu çoxüzlünün təpələrinin sayını tapın.

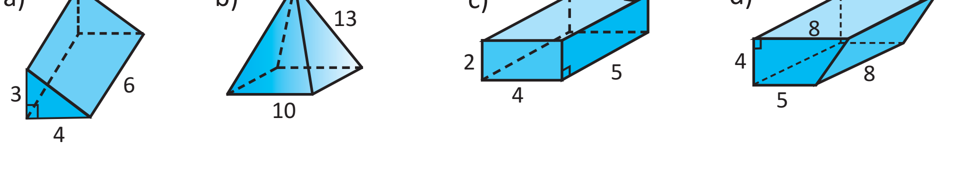
4. Şəkildə verilənlərə görə düzgün prizma və piramidalardan təşkil olunmuş mürəkkəb fiqurların səthlərinin sahəsini hesablayın.



5. Tərəfi 6 sm olan kubun A′, B, C′ təpələrindən keçən müstəvi ilə kəsiyindən ayrılan piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

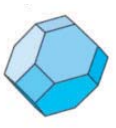


6. Düz prizmaların və düzgün piramidanın açılış şəkillərini çəkin. Tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

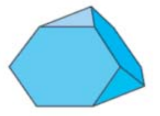


7. Verilən məlumatlara əsasən çoxüzlülərin təpələrinin sayını Eylər düsturundan istifadə etməklə hesablayın.

a) 14 üzü var. 6-sı kvadrat, 8-i altıbucaqlıdır.

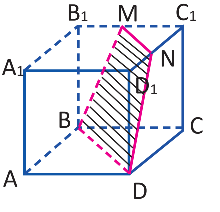


b) 8 üzü var. 4-u üçbucaq, 4-ü altıbucaqlıdır.



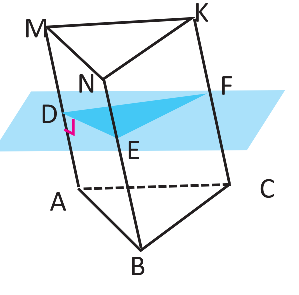
c) 32 üzü var. 12-si səkkizbucaqlı, 20-si üçbucaqdır.

8. Tili *a* olan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubu verilmişdir. Oturacağın BD diaqonalından, B_1C_1 və C_1D_1 tillərinin orta nöqtələrindən (M və N) keçən müstəvi ilə kəsiyinin sahəsini tapın.



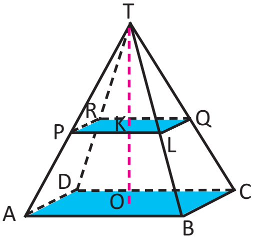
9. 1) Göstərin ki, mail prizmanın yan səthinin sahəsi onun yan tillərinə perpendikulyar kəsiyinin perimetri ilə yan tilinin uzunluğu hasilinə bərabərdir. $S_{yan} = P_{per.kəs.} \cdot l_{yan}$

Göstəriş: Mail prizmanın yan üzlərinin paraleloqram və perpendikulyar kəsikdə alınan fiqurun tərəflərinin uyğun papaleloqramın hündürlüyü olduğunu nəzərə alın.

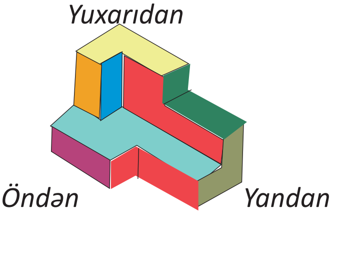


2) Mail üçbucaqlı prizmada yan tillərə perpendikulyar kəsik tərəfləri 2 sm, 3 sm, 4 sm olan üçbucaqdır. Prizmanın yan səthinin sahəsi 45 sm^2 olarsa, yan tilinin uzunluğunu tapın.

10. Oturacağının sahəsi 150 sm^2 olan piramidada oturacağa paralel kəsiyin sahəsi 54 sm^2-dır. Oturacaqla kəsik arasındakı məsafə 14 sm olarsa, piramidanın hündürlüyünü tapın.



11. Şəkildəki konstruksiyanın görünüşlərini çəkin.



7

Triqonometrik tənliklər

Tərs triqonometrik funksiyalar

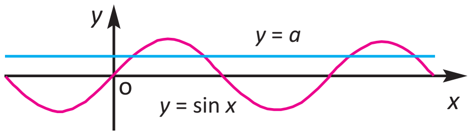
Sadə triqonometrik tənliklər

Triqonometrik tənliklərin həll üsulları

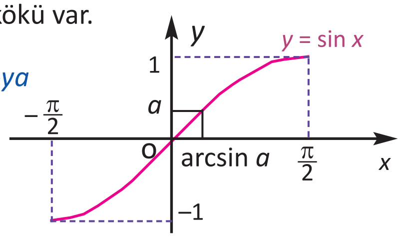
Triqonometrik tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli

Tərs triqonometrik funksiyalar

Absis oxuna paralel olan $y = a$ ($|a| < 1$) düz xətti $y = \sin x$ sinusoidini sonsuz sayda nöqtədə kəsir. Bu o deməkdir ki, bütün ədəd oxunda $y = \sin x$ funksiyasının tərsi yoxdur.



Lakin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $y = \sin x$ artandır və –1-dən 1-ə kimi bütün qiymətləri alır, həm də hər bir qiymətini arqumentin yalnız bir qiymətində alır.
Deməli, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında $\sin x$ funksiyası dönəndir və $|a| \le 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ parçasında yeganə kökü var.



$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığından götürülən və sinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arksinusu deyilir, arcsin a kimi işarə edilir.

$x = \arcsin a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ 2) $\sin x = a$

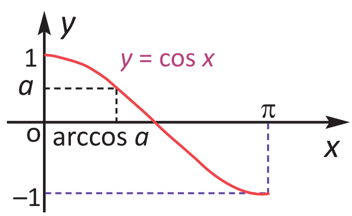
Nümunələr. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, çünki $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, çünki $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ və $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Tərifdən aydındır ki, $\sin(\arcsin a) = a$

Göstərmək olar ki, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Oxşar qayda ilə göstərilir ki, bütün ədəd oxunda $y = \cos x$ funksiyasının tərsi yoxdur. Lakin $[0; \pi]$ parçasında $y = \cos x$ azalandır və $[-1; 1]$ parçasına daxil olan bütün qiymətləri alır. Yəni, $[0; \pi]$ parçasında $y = \cos x$ funksiyası dönəndir və $|a| \le 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin $[0; \pi]$ parçasında yeganə kökü var.



$[0; \pi]$ parçasından götürülən və kosinusu a-ya bərabər olan bucağa a ədədinin arkkosinusu deyilir, arccos a kimi işarə edilir.

$x = \arccos a$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 \le x \le \pi$ 2) $\cos x = a$

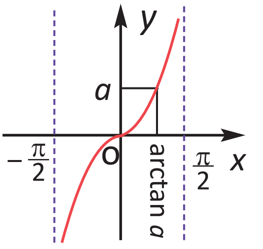
Nümunələr. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ və $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$, çünki $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ və $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Tərifə görə: $\cos(\arccos a) = a$

Göstərmək olar ki, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

$y = \tan x$ funksiyası $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında artandır və $(-\infty; +\infty)$ aralığındakı bütün qiymətləri alır. Ona görə də istənilən a ədədi üçün $\tan x = a$ tənliyinin $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında yeganə kökü var.



$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığından götürülən və tangensi a-ya bərabər olan bucağa a-nın arktangensi deyilir, arctan a kimi işarə edilir.

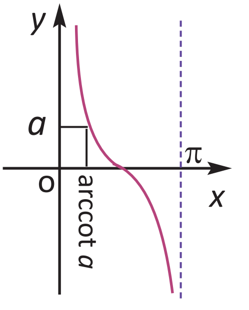
$\arctan a = x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir: 1) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 2) $\tan x = a$

Nümunələr. $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, çünki $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ və $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, çünki $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ və $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$.

Tərifə görə: $\tan(\arctan a) = a$

Göstərmək olar ki, $\arctan(-a) = -\arctan a$.



Oxşar qayda ilə arkkotangens anlayışı daxil edilir.

$(0; \pi)$ aralığından götürülən və kotangensi a-ya bərabər olan ədədə a-nın arkkotangensi deyilir, arccot a kimi işarə edilir.

$\operatorname{arccot} a = x$ bərabərliyi iki şərtə ekvivalentdir:

1) $0 < x < \pi$ 2) $\cot x = a$

Nümunələr. $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$, çünki $\cot\frac{\pi}{4} = 1$ və $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$

$\operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, çünki $\cot\frac{3\pi}{4} = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -1$ və $\frac{3\pi}{4} \in (0; \pi)$.

Tərifə görə: $\cot(\operatorname{arccot} a) = a$

Göstərmək olar ki, $\operatorname{arccot}(-a) = \pi - \operatorname{arccot} a$.

Kalkulyatorlarda tərs triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapmaq üçün $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ düymələri nəzərdə tutulmuşdur.

$\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\csc^{-1}x$ qiymətlərini tapmaq üçün də $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ düymələrindən istifadə edilir.

Məsələn, $y = \sec^{-1}x$ isə deməli, $\sec y = x$ və bu funksiyanı kosinus ilə ifadə edə bilərik. $\frac{1}{\cos y} = x$, $\cos y = \frac{1}{x}$. Buradan, $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$

Deməli, biz $y = \sec^{-1}x$ hesablamaq üçün $y = \cos^{-1}\frac{1}{x}$ -i hesablamalıyıq.

Diqqət edin! $\sin^{-1}x \xrightarrow{\text{demək deyil}} \frac{1}{\sin x}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilmiş bərabərliyi ödəyən və verilmiş aralıqda yerləşən *t* bucağını tapın.

a) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ b) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

c) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi]$ d) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$

e) $\tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ f) $\cot t = -1$, $(0; \pi)$

2. İfadənin qiymətini radian və dərəcə ilə ifadə edin.

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\arctan \sqrt{3}$ | $\text{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3}$

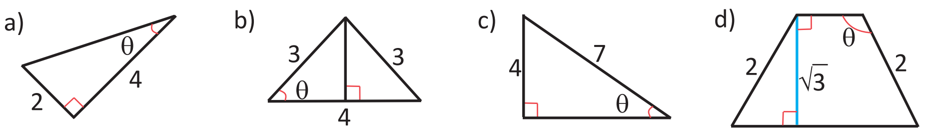
$\arcsin(-\frac{1}{2})$ | $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ | $\arctan(-1)$ | $\text{arccot}(-\sqrt{3})$

3. İfadələrin qiymətlərini kalkulyatorun köməyilə hesablayın. Nəticəni yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

a) $\tan^{-1} 3{,}9$ b) $\cos^{-1} 0{,}24$ c) $\sin^{-1} 0{,}24$ d) $\sin^{-1} 0{,}75$

e) $\sin^{-1} (-0{,}4)$ f) $\cos^{-1} (-0{,}6)$ g) $\tan^{-1} (-0{,}2)$ h) $\tan^{-1} 2{,}25$

4. Verilənlərə görə θ bucağını tapın.



5. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\arcsin 0 + \arcsin 1$ b) $\arccos(-1) - \arccos 0$

c) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\arctan(-1) + \text{arccot}(-1)$

6. Bərabərliklərin doğruluğunu yoxlayın.

a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$ b) $\arctan \sqrt{3} + \text{arccot} \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$

7. Hesablayın.

a) $\cos(\arcsin\frac{1}{2})$ b) $\sin(\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}))$ c) $\tan(2\cdot\arctan \sqrt{3})$

d) $\cot(2\cdot\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$ e) $\sin(2\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2})$ f) $\cos(3\cdot\arccos \frac{1}{2})$

8. Verilənlərə görə α bucağını tapın. Lazım gəldikdə kalkulyatordan istifadə edin.

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ b) $\tan \alpha = 1$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

e) $\cos \alpha = 0{,}43$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ f) $\sin \alpha = 0{,}8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

9. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\sin(\arccos\frac{3}{5})$ b) $\cos(\arcsin\frac{5}{13})$

c) $\sin(2\cdot\arccos\frac{4}{5})$ d) $\cos(2\cdot\arccos\frac{3}{5})$

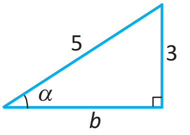
e) $\cos(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{12}{13})$ f) $\sin(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13})$

Nümunə. $\sin(2\cdot\arcsin\frac{3}{5})$ ifadəsinin qiymətini tapın.

Həlli: $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$ olsun. Deməli, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ və $\alpha\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

İti bucağının sinusu $\frac{3}{5}$ olan düzbucaqlı üçbucaqda α bucağına bitişik kateti tapaq:

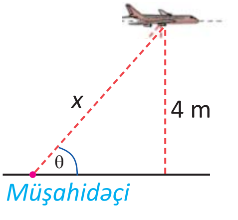
$b=\sqrt{5^2-3^2}=4$.



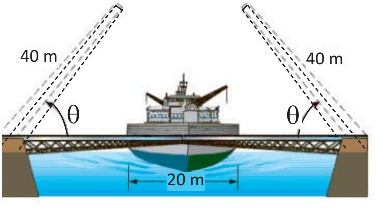
Buradan, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ olur. İşarələməni nəzərə almaqla yaza bilərik:

$\sin(2\cdot\arcsin\frac{3}{5})=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$

10. Motorlu oyuncaq təyyarə yerdən 4 m hündürlükdə uçur.
a) Müşahidəçidən təyyarəyə qədər olan məsafənin θ yüksəliş bucağından asılılığını göstərən funksiyanı yazın.
b) Müşahidəçi ilə təyyarə arasındakı məsafə 25 m olduqda θ bucağı neçə dərəcə olacaq?



11. Böyük çaylar üzərində körpülər salınarkən böyük gəmilərin keçidini təmin etmək üçün onlar elə konstruksiya edilir ki, qaldırılıb endirilə bilsin. Çayın üzərində salınmış belə körpünün hər qanadının uzunluğu 40 m -dir. Eni 20 m olan hər hansı hündürlükdə gəminin maneəsiz keçməsi üçün körpünün qanadları ən azı neçə dərəcə bucaq altında qaldırılmalıdır?



12. Hesablayın.

a) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{6})$ b) $\arccos(\cos\frac{\pi}{6})$ c) $\arctan(\tan\frac{\pi}{3})$

13. $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$ ifadəsinin qiymətini Ənvər və Lalə aşağıdakı kimi hesabladılar.

Ənvər: $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})=\frac{2\pi}{3}$

Lalə: $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})=\arcsin(\sin(\pi-\frac{\pi}{3}))=\arcsin(\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$

Verilən ifadənin qiymətini kim doğru tapmışdır? Cavabınızı əsaslandırın.

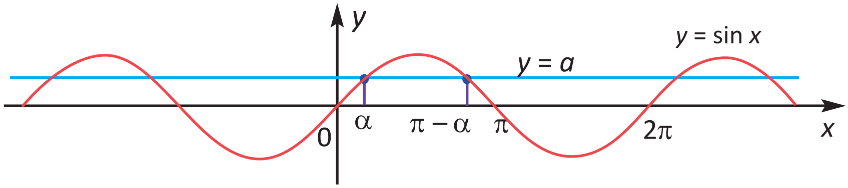
14. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6})$ b) $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3})$ c) $\arctan(\tan\frac{2\pi}{3})$

$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$ tənlikləri ən sadə triqonometrik tənliklərdir.

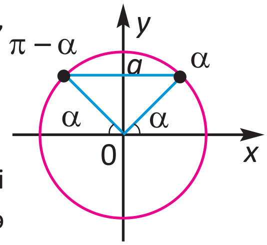
sin $x = a$ tənliyi

Sinusun dəyişmə oblastı $[-1;\ 1]$ parçasıdır. Ona görə də, $|a| > 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin kökü yoxdur. $|a| \le 1$ olan hallara baxaq.
Eyni koordinat müstəvisində $y = \sin x$ və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.



$y = a$ $(|a| \le 1)$ düz xətti sinusoidlə sonsuz sayda ortaq nöqtəyə malikdir. Bu o deməkdir ki, $|a| \le 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin sonsuz sayda kökü var.

Sinus dövri funksiya olduğundan, uzunluğu dövrə bərabər, yəni 2π olan hər hansı aralıqda kökləri tapmaq kifayətdir. Qrafikdən görünür ki, $|a| < 1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin $[0;\ 2\pi]$ parçasında iki kökü var.
Nöqtənin çevrə üzrə fırlanma hərəkətinə baxdıqda da eyni nəticəyə gəlmək olar: tam dövr ərzində sinusu eyni ədədə bərabər olan iki bucaq tapılır.

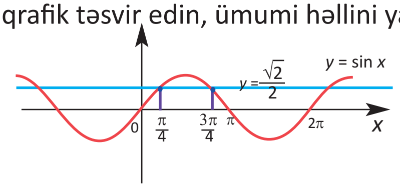


Dönmə bucaqlarından biri α olarsa, digəri $\pi - \alpha$ olur. $\sin x = a$ $(|a| < 1)$ tənliyinin qalan həlləri isə bu iki həllə dövrün misillərini əlavə etməklə alınır.

$|a| \le 1$ olduqda **sin $x = a$ tənliyinin** $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ parçasında kökü $x = \arcsin a$ olduğundan, bu tənliyin bütün kökləri $x = \arcsin a + 2\pi n$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $(n \in Z)$ düsturları ilə tapılır. Bu düsturları birləşdirib, **ümumi həlli** $\boldsymbol{x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k\ (k \in Z)}$ şəklində yazmaq olar.

Nümunə 1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyinin həllini qrafik təsvir edin, ümumi həllini yazın.

Həlli. Eyni koordinat müstəvisində $y = \sin x$ və $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.



$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ olduğundan uzunluğu dövrə bərabər olan $[0;2\pi]$ parçasında verilmiş tənliyin köklərindən biri $\frac{\pi}{4}$, digəri isə $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ olur.
Tənliyin bütün kökləri: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.

Ümumi həlli: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, $(k \in Z)$.

Nümunə 2. $\sin x = \frac{1}{2}$ tənliyinin $[0;3\pi]$ parçasında neçə kökü var?

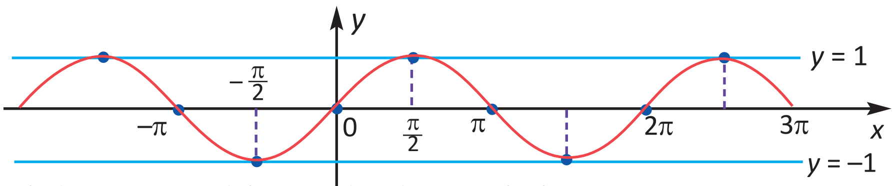
Həlli: Tənliyin həllini $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ (k \in Z)$ şəklində yazıb, $k = 0;\ 1;\ 2;3$ qiymətlərinə uyğun dörd kök tapırıq: $x_0 = \frac{\pi}{6},\ x_1 = \frac{5\pi}{6},\ x_2 = \frac{13\pi}{6},\ x_3 = \frac{17\pi}{6}$.

k parametrinin digər qiymətlərinə uyğun köklər verilən parçaya aid olmur.

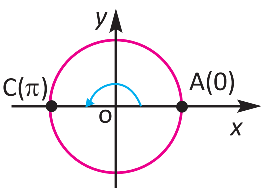
Nümunə 3. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k,\ (k \in Z)$

$a = 0,\ a = 1,\ a = -1$ olduqda $\sin x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə şəkildə göstərmək olar.



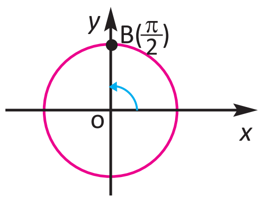
Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək olar.



ordinatı 0 olan nöqtələr A(0) və C(π)

$\sin t = 0$

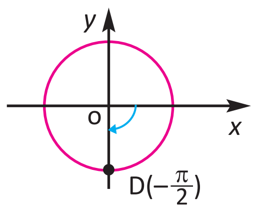
$t = \pi k\ (k \in Z)$



ordinatı 1 olan nöqtə $B(\frac{\pi}{2})$

$\sin t = 1$

$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$



ordinatı –1 olan nöqtə $D(-\frac{\pi}{2})$

$\sin t = -1$

$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$

Nümunə 4. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x + \frac{\pi}{3} = t$ əvəz etsək, $\sin t = 1$ tənliyini alarıq.

Bu tənliyin həlli $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$ olur.

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ (k \in Z)$

Buradan $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\ (k \in Z)$

Nümunə 5. $\sin(x - 30^\circ) = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada x-in dərəcələrlə ifadə edilmiş bucaq olduğu aydındır.

Ona görə tənliyin həllini belə yazmaq olar:

$x - 30^\circ = 180^\circ \cdot k,$ $\quad x = 30^\circ + 180^\circ \cdot k\ \ (k \in Z).$

Öyrənmə tapşırıqları

1. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $2\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ b) $\sqrt{8}\sin x = \sqrt{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

2. Tənliyin: 1) həllini qrafik təsvir edin;
2) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ parçasındakı köklərini tapın; 3) ümumi həllini yazın.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$ c) $2\sin x = -\sqrt{3}$ d) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$
e) $\sin x = 1$ f) $1 + \sin x = 0$ g) $2\sin x - 1 = 0$ h) $\sin x = 0$

3. Tənlikləri həll edin.

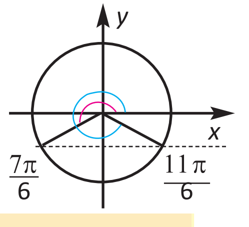
a) $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ b) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ c) $2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$

4. Nümunəni araşdırın, tənliklərin verilmiş aralıqda köklərini yazın.

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $0 \le x \le 3\pi$ b) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \le x \le 3\pi$

Nümunə.
Tənliklərin $[0; 3\pi]$ parçasındakı köklərini yazın.
1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 2) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

Hər iki tənliyin ümumi şəkli olan $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ tənliyinin həllini nəzərdən keçirək. Vahid çevrə üzərində ordinatı $-\frac{1}{2}$-ə bərabər olan iki nöqtə var. Bu nöqtələr $\frac{7\pi}{6}$ və $\frac{11\pi}{6}$ dönmələrinə uyğundur.



Tənliyin həlli: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ və $\frac{11\pi}{6} + 2\pi k$ $(k \in Z)$

1) Bu halda $\theta = x$ və $0 \le x \le 3\pi$. Bu aralıqda tənliyi x-in yalnız $\frac{7\pi}{6}$ və $\frac{11\pi}{6}$ qiymətləri ödəyir. **Cavab:** $x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

2) bu halda $\theta = 2x$. Əgər x $0 \le x \le 3\pi$ şərtini ödəyirsə, $0 \le 2x \le 6\pi$ olur və tənliyin verilən aralıqdakı kökləri aşağıdakı kimidir:

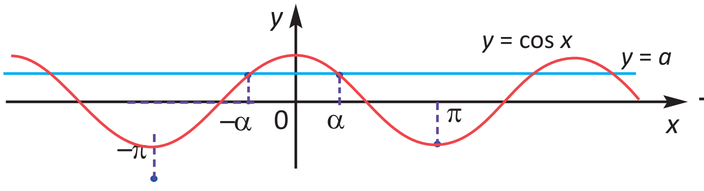
$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \qquad 2x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}, \frac{35\pi}{6}$$

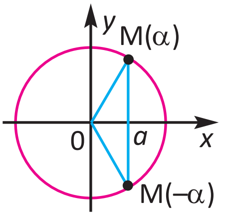
+2π +2π +2π +2π

$$x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}, \frac{35\pi}{12}$$

$\cos x = a$ tənliyi

Oxşar qayda ilə alırıq ki, $|a| > 1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həlli yoxdur, $|a| \le 1$ olduqda isə sonsuz sayda kökü var. Qrafikdən (eləcə də vahid çevrədən) görünür ki, uzunluğu dövrə (yəni 2π-yə) bərabər olan parçada $\cos x = a$ ($|a| < 1$) tənliyinin iki kökü var.





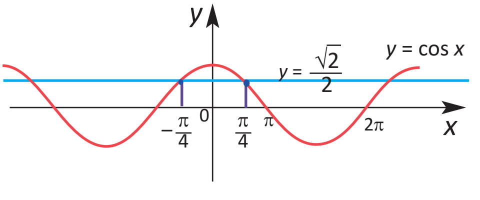
Əgər α $\cos x = a$ tənliyinin köküdürsə, onda $-\alpha$ da köküdür, çünki $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Beləliklə, $\cos x = a$ tənliyinin bir kökünün α olduğu məlumdursa, bu tənliyin köklərini $x = \alpha + 2\pi n$ və $x = -\alpha + 2\pi n$ ($n \in Z$) düsturları ilə tapmaq olar. Bu iki düsturu bəzən birləşdirib, $x = \pm\alpha + 2\pi n$ ($n \in Z$) şəklində yazırlar.

$|a| \le 1$ olduqda **$\cos x = a$** tənliyinin $[0; \pi]$ parçasındakı kökü $x = \arccos a$ olduğundan bu tənliyin ümumi həlli

$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ($n \in Z$) şəklində olur.

Nümunə 6. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tənliyinin həllini qrafik təsvir edin, ümumi həlli yazın.

Həlli: Eyni koordinat sistemində $y = \cos x$ və $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ funksiyalarının qrafiklərini quraq.



$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ olduğundan uzunluğu dövrə bərabər olan $[-\pi; \pi]$ parçasında verilmiş tənliyin köklərindən biri $\frac{\pi}{4}$, digəri isə $-\frac{\pi}{4}$ olur.

Onda bütün kökləri: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ və $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in Z$) .

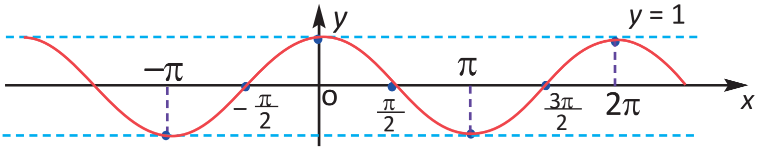
Ümumi həlli: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ($n \in Z$)

Nümunə 7. $\cos x = -\frac{1}{2}$ tənliyini həll edin.

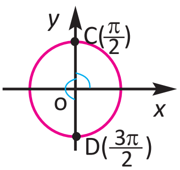
Həlli: $x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n$ ($n \in Z$)

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in Z$)

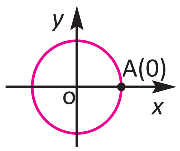
$a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ olduqda $\cos x = a$ tənliyinin həllərini daha sadə vermək olar.



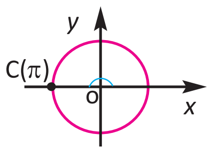
Bunu vahid çevrə üzərindəki təsvirdən də görmək mümkündür.



absisi 0 olan nöqtələr $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(\frac{3\pi}{2}\right)$



absisi 1 olan nöqtə $A(0)$



absisi –1 olan nöqtə $C(\pi)$

$\cos t = 0$	$\cos t = 1$	$\cos t = -1$
$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ (n \in Z)$	$t = 2\pi n, \ (n \in Z)$	$t = \pi + 2\pi n, \ (n \in Z)$

Nümunə 8. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ tənliyini həll edin.

$x + \frac{\pi}{4} = t$ əvəz edək: $\cos t = -1$, $t = \pi + 2\pi k \ (k \in Z)$

Əvəzləməni nəzərə alaq: $x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \ (k \in Z)$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k$, $\qquad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \ (k \in Z)$

Öyrənmə tapşırıqları

5. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $\cos x + 1 = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ $\qquad$ b) $\sqrt{8}\cos x = 2$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6}$

6. Tənliyin: 1) həllini qrafik təsvir edin;

2) $[-\pi; \pi]$ parçasındakı köklərini tapın; 3) ümumi həllini yazın.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ c) $2\cos x = \sqrt{2}$ $\qquad$ d) $2\cos x = \sqrt{3}$

e) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ $\qquad$ f) $2\cos x + 1 = 0$ $\qquad$ g) $\cos x - 1 = 0$ $\qquad$ h) $\cos 2x = 0$

7. Tənliklərin $0 \le x \le 3\pi$ aralığındakı həllərini yazın.

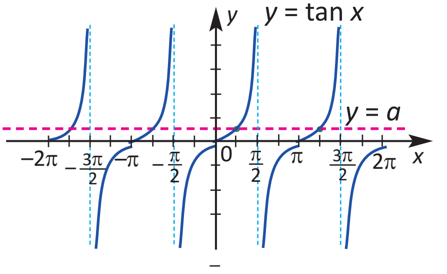
a) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ b) $\cos 2x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

tan *x* = *a* və cot *x* = *a* tənlikləri

$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ aralığında tan $x = a$ tənliyinin həlli $x = \arctan a$ olur. tan x funksiyasının əsas dövrünün π olduğunu nəzərə alsaq, **tan *x* = *a*** tənliyinin bütün həllərini

$$x = \arctan a + \pi n,\ (n \in Z)$$

düsturu ilə vermək olar.



$y = \tan x$ və $y = a$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələri də həllin düzgün olduğunu göstərir.

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, **cot *x* = *a*** tənliyinin bütün həlləri

$$x = \operatorname{arccot} a + \pi n\ (n \in Z)$$ şəklindədir.

Nümunə 9. $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli: $x - \frac{\pi}{6} = t$ əvəz etsək, $\tan t = \sqrt{3}$ tənliyini alarıq.

Bu tənliyin həlli $t = \frac{\pi}{3} + \pi n\ (n \in Z)$ olur.

Əvəzləməni nəzərə alaq:

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi n\ (n \in Z)$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n\ (n \in Z)$

Nümunə 10. $\cot 3x = -1$ tənliyini həll edin.

Həlli: $3x = t$ əvəz edək: $\cot t = -1$

$\operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ olduğuna görə $t = \frac{3\pi}{4} + \pi n.$

Əvəzləməyə görə $3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$. Buradan hər iki tərəfi 3-ə bölməklə alırıq ki,

$\cot 3x = -1$ tənliyinin bütün həlləri $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3},\ (n \in Z)$ şəklindədir.

Nümunə 11. $\tan x = 0{,}75$ tənliyini həll edin.

Bu tip tənlikləri həll edərkən kalkulyatorla hesablamalardan istifadə edin. Kalkulyatorun $\tan^{-1}$ düyməsi ilə 0,75 ədədini daxil etsək, Degree düyməsini seçdikdə $\approx 36{,}87°$ qiyməti hesablanmış olacaq. Tangens dövri funksiya olduğundan, $36{,}87° + 180°$, $36{,}87° - 180°$, $36{,}87° + 360°$, $36{,}87° - 360°$, $36{,}87° + 540°$, $36{,}87° - 540°$ qiymətlərində də tangensin qiyməti təqribən 0,75-ə bərabərdir. Odur ki, tənliyin həlli dərəcə ilə ümumi şəkildə

$x \approx 36{,}87° + 180°k$, $(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$ kimi yazıla bilər.

Radian düyməsini seçsək, tənliyin həlli $x \approx 0{,}6435 + \pi k$, $k \in Z$ kimi olar.

$\cot x = a$, $\sec x = a$, $\csc x = a$ tənliklərini

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

bərabərliklərindən istifadə etməklə həll etmək olar.

Nümunə 12. $\csc x + 1 = 0$ tənliyini $x \in [0; 2\pi]$ aralığında yerləşən kökünü tapın.

Həlli: $\csc x = -1$

$\frac{1}{\sin x} = -1$ $\quad \sin x = -1$ tənliyinin ümumi həlli: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z)$

Verilmiş tənliyin $[0; 2\pi]$ aralığında kökü $x = \frac{3\pi}{2}$ -dir.

Öyrənmə tapşırıqları

8. x-in verilən qiymətlərindən hansı verilmiş tənliyin köküdür? Dövriliyə əsasən tənliyin biri müsbət, biri mənfi olmaqla daha iki kökünü yazın və yoxlayın.

a) $\tan x - \sqrt{3} = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ b) $\sqrt{6}\cot x = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{6}$

9. Tənliklərin: 1) $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ aralığındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın.

a) $\tan x = \sqrt{3}$ $\qquad$ b) $\tan x = -1$ $\qquad$ c) $\tan x = 1$ $\qquad$ d) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. Tənliklərin: 1) $(0; \pi)$ aralığındakı kökünü tapın; 2) ümumi həllini yazın.

a) $\cot x = \sqrt{3}$ $\qquad$ b) $\cot x = -1$ $\qquad$ c) $\cot x = -\sqrt{3}$ $\qquad$ d) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. $\tan x = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin. Həldən istifadə etməklə aşağıdakı tənliklərin ümumi həllini yazın.

a) $\tan(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ $\qquad$ b) $\tan 4x = \sqrt{3}$ $\qquad$ c) $\cot 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

12. Tənliklərin: 1) $[0; 2\pi]$ aralığındakı köklərini tapın;
2) həlli ümumi şəkildə yazın;
3) həlli qrafik təsvir edin.

a) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ $\qquad$ b) $2\cos x = 1$ $\qquad$ c) $\tan x + 1 = 0$

d) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ $\qquad$ e) $\sin x = 0$ $\qquad$ f) $\tan x + \sqrt{3} = 0$

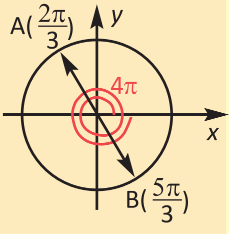
13. Tənlikləri kalkulyatorun köməyi ilə həll edin və hər birinin üç kökünü göstərin.

a) $\tan\theta = 3$ $\qquad$ b) $\sin\theta = 0,85$ $\qquad$ c) $\cos\theta = 0,47$

14. Tənliklərin $0 \le x \le 4\pi$ aralığındakı köklərini nümunəyə uyğun tapın.

a) $2\tan x = -2$ b) $2\sin x = -1$ c) $2\cos x = -\sqrt{3}$

Nümunə. $\tan x = -\sqrt{3}$



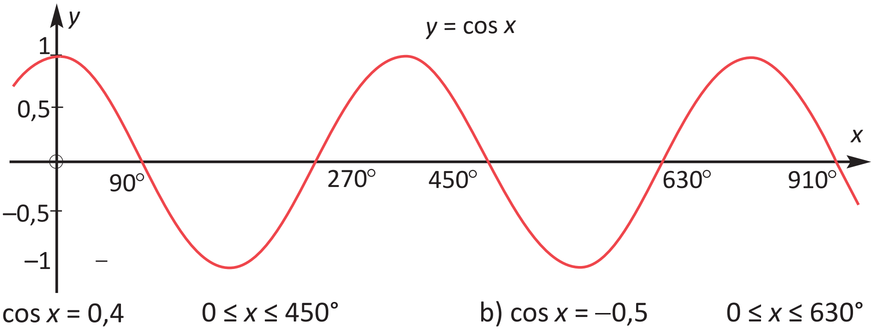
Həlli: Vahid çevrə üzərində tangens funksiyasının $-\sqrt{3}$-ə bərabər olduğu dönmə bucağına uyğun iki nöqtə təsvir edilmişdir: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. Lakin dövrü π olduğundan, tangens $-\sqrt{3}$-ə bərabər olan qiymətlərini bir-birindən π qədər aralı yerləşən nöqtələrdə alır, yəni $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$.

Deməli, $\tan x = -\sqrt{3}$ tənliyinin $0 \le x \le 4\pi$ intervalındakı köklərini aşağıdakı qayda ilə tapa bilərik:

$$\frac{2\pi}{3} \qquad \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \qquad \frac{5\pi}{3} + \pi = \frac{8\pi}{3} \qquad \frac{8\pi}{3} + \pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$0 \longleftarrow \quad 0 \le x \le 4\pi \quad \longrightarrow 4\pi$$

15. $y = \cos x$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə tənliklərin verilmiş aralıqdakı təqribi köklərini tapın.



a) $\cos x = 0{,}4$ $\quad 0 \le x \le 450°$ b) $\cos x = -0{,}5$ $\quad 0 \le x \le 630°$

c) $\cos x + 1 = 1$ $\quad 0 \le x \le 910°$ d) $2\cos x = -2$ $\quad 0 \le x \le 630°$

16. Tənlikləri həll edin.

a) $2\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ b) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$ c) $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

d) $2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e) $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$ f) $\cot(2x - \frac{\pi}{6}) = 0$

17. Tənlikləri həll edin.

a) $\sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$

c) $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ d) $\sin x \cdot \cos x = 0$

18. Tənliyin verilmiş aralıqda yerləşən köklərini tapın.

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$
b) $\cos^2(x + 30^\circ) - \sin^2(x + 30^\circ) = -1$, $(180^\circ; 270^\circ)$
c) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$, $[-\pi; 2\pi]$

Nümunə. a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, $(0; 3\pi]$

Həlli: Tənliyi $\cos 2x = 1$ şəklində yazaq. $\cos\theta = 1$ tənliyinin ümumi həlli $\theta = 2\pi k$, $(k \in Z)$ olduğundan alırıq: $2x = 2\pi k$, $x = \pi k$, $(k \in Z)$

Şərtə görə $0 < x \le 3\pi$ olmalıdır. Buradan $0 < \pi k \le 3\pi$ bərabərsizliyinin hər iki tərəfini π-yə bölsək, $0 < k \le 3$, $(k \in Z)$ alırıq.

$k = 1; 2; 3$ qiymətlərini ardıcıl olaraq $x = \pi k$ $(k \in Z)$ həllində yazmaqla tənliyin verilmiş aralıqdakı köklərini tapırıq: π; 2π; 3π.

19. Funksiyaların verilən aralıqda sıfırlarını tapın.

a) $y = \sin 2x$, $0^\circ \le x \le 180^\circ$ b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $0 \le x \le 3\pi$

20. $y = 3\cos(x + \frac{\pi}{3})$ funksiyasının qrafiki ilə $y = 1{,}5$ düz xəttinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapın

21. Tənlikləri həll edin.

a) $\sin(\pi + x) = -1$ b) $\cos(\pi - x) = 1$ c) $\sin \pi x = 0$

d) $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = 0$ e) $\tan(\frac{3\pi}{2} + x) = 1$ f) $\cot(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) = \sqrt{3}$

22. Tənliklərin verilən aralıqda yerləşən köklərini tapın.

a) $4\tan 3x + 5 = 1$, $0 \le x \le \pi$

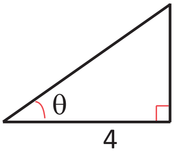
b) $2\cos 2x + 3 = 2$, $0 \le x \le 360^\circ$

c) $2\sin 2x + \sqrt{3} = 0$, $0 \le x \le 2\pi$

d) $\sqrt{2}\sin 2x + 3 = 2$, $0 \le x \le 360^\circ$

23. $\frac{\sin \pi x}{x - 1} = 0$ tənliyinin $[0; 2\pi]$ parçasında neçə kökü var?

24. $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ olduğuna görə üçbucağın perimetrini tapın.



Verilmiş triqonometrik tənliyin həlli müəyyən üsullarla sadə triqonometrik tənliyin həllinə gətirilir. Əsas həll üsullarını nümunələr üzərində göstərək.

1) Vuruqlara ayırma üsulu

Nümunə. $\sin 2x - \sin x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$ *ikiqat bucaq düsturuna görə* $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ *ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarma*

$\sin x = 0$ və ya $2\cos x - 1 = 0$ *hasilin "0"-a bərabər olması şərti*

$x = \pi n,\ n \in Z$ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

Cavab: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n \in Z,\ k \in Z$

Müxtəlif həll ailələrində parametrlərin (n, k) müxtəlif hərflərlə işarələnməsinə diqqət edin.

Nümunə. $\sin x \cos^2 x = 4\sin x$ tənliyini həll edin və $[0; 2\pi]$ parçasındakı köklərini tapın.

Həlli: $\sin x \cos^2 x = 4\sin x$ *verilən tənlik*

$\sin x \cos^2 x - 4\sin x = 0$ *hər iki tərəfdən 4 sin x çıxılır*

$\sin x(\cos^2 x - 4) = 0$ *sin x mötərizə xaricinə çıxarılır*

$\sin x(\cos x - 2)(\cos x + 2) = 0$ *kvadratlar fərqi düsturu ilə vuruqlara ayrılır*

Hər bir vuruğu sıfıra bərabər etməklə x tapılır (əgər mümkünsə).

$\sin x = 0$ $\cos x - 2 = 0$ $\cos x + 2 = 0$

$x = \pi k,\ k \in Z$ $\cos x = 2$ $\cos x = -2$

kökü yoxdur kökü yoxdur

Tənliyin ümumi həlli: $x = \pi k,\ (k \in Z)$

Tənliyin $[0; 2\pi]$ parçasında kökləri: $x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$.

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: $2(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0$ *$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ eyniliyinə görə*

$-2\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ *sadələşdirmə*

$2a^2 + a - 3 = 0$ *$\cos x = a$ yeni dəyişəni daxil edək*

$(2a + 3)(a - 1) = 0$

$a = -1{,}5$ | $a = 1$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\cos x = -1{,}5$ | $\cos x = 1$ *$\cos x = a$ əvəzləməsinə görə*

kökü yoxdur | $x = 2\pi k,\ k \in Z$

Cavab: $x = 2\pi k,\ (k \in Z)$.

3) Bircins tənliklərin həlli

$\sin x = a$, $\cos x = b$ olduqda bütün hədləri a və b-yə görə eynidərəcəli birhədlilər olan tənliklərin - bircins tənliklərin həllinə baxaq.

Nümunələr. $2\sin x - \cos x = 0$, $\quad \sin^2 x - 3\sin x\cdot\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Ortaq vuruq yoxdursa, bircins tənlik hər iki tərəfi $\cos x$-in (və ya $\sin x$-in) böyük qüvvətinə bölməklə həll edilə bilər.

Nümunə. $\sin x + \cos x = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $\cos x = 0$ ola bilməz, çünki $\cos x = 0$ olduqda tənlikdən $\sin x = 0$ alınır ki, bu da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eyniliyinə ziddir. Deməli, $\cos x \neq 0$ olmalıdır.

Tənliyin hər iki tərəfini $\cos x$-ə bölə bilərik: $\tan x + 1 = 0$.

Buradan $\tan x = -1$, $\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

4) Dərəcəni azaltma düsturlarının tətbiqi

Nümunə. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ düsturunun tətbiqi əlverişli olur:

$\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$ *hər iki tərəfi 2-yə vuraq*

$1 + \cos 2x = \frac{1}{2}$ *hər iki tərəfdən 1 çıxaq*

$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ *$2x = t$ əvəz edək*

$\cos t = -\frac{1}{2}$

$t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ $\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *olduğuna görə*

$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ *hər iki tərəfi 2-yə bölək*

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

5) Köməkçi bucaq daxiletmə

$a\sin x \pm b\cos x = d$ tipli tənlikləri $ab \neq 0$ olduqda hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ədədinə bölüb, köməkçi bucaq daxil etməklə həll etmək əlverişlidir.

Nümunə. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$ tənliyini həll edin.

Həlli: Burada $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ olduğundan hər iki tərəfi $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$-yə bölək:

$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\cos x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\frac{\pi}{6}}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *köməkçi $\frac{\pi}{6}$ bucağı daxil edilir*

$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *toplama düsturuna görə*

$\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *$t = x - \frac{\pi}{6}$ əvəz edək*

$t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ və ya $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ | $x = 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

Cavab: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ 2\pi n,\ n \in Z.$

Nümunə. $\cos x = \sin\frac{x}{2}$ tənliyinin $[0; 2\pi]$ parçasında neçə kökü var?

Həlli: $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$ *ikiqat bucaq düsturuna görə*

$1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0$ *$\sin\frac{x}{2} = a$ əvəz edək*

$2a^2 + a - 1 = 0$

$a = -1$ $a = \frac{1}{2}$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\sin\frac{x}{2} = -1$ | $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ | $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

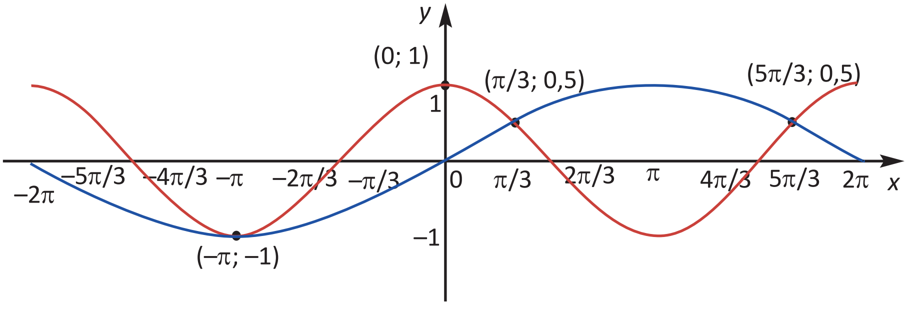
$x = -\pi + 4\pi n,\ n \in Z$ | $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k$; $x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z.$

n parametrinin heç bir qiymətində tapılan köklər verilən parçada yerləşmir.

$k = 0$ olduqda tapılan $\frac{\pi}{3}$ və $\frac{5\pi}{3}$ verilmiş tənliyin $[0; 2\pi]$ parçasındakı kökləridir. k parametrinin digər qiymətlərinə uyğun köklər bu parçada yerləşmir.

Cavab: İki kökü var.

$y = \cos x$ və $y = \sin\frac{x}{2}$ funksiyalarının qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinə görə də həllin düzgünlüyünü yoxlamaq olar. Bu qrafikləri qrafkalkulyatorla *(https://www.desmos.com/calculator)* qurmaqla həlli yoxlayaq.



Öyrənmə tapşırıqları

1. x-in verilən qiymətlərindən hansı tənliyin köküdür?

1) $2\cos x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{3}$ b) $x = \frac{5\pi}{3}$

2) $\csc x - 2 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{6}$ b) $x = \frac{5\pi}{6}$

3) $3\tan^2 2x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{12}$ b) $x = \frac{5\pi}{12}$

4) $2\cos^2 4x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{16}$ b) $x = \frac{3\pi}{16}$

5) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

a) $x = \frac{\pi}{2}$ b) $x = \frac{7\pi}{6}$

6) $\sec^4 x - 4\sec^2 x = 0$

a) $x = \frac{2\pi}{3}$ b) $x = \frac{5\pi}{3}$

2. Tənlikləri vuruqlara ayırma üsulu ilə həll edin.

a) $2\sin^2 x - \sin x = 0$ b) $\sin^2 x + 2\sin x = 0$
c) $\cos^2 x - 3\cos x = 0$ d) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ b) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$
c) $\cos^2 x - 4\cos x - 5 = 0$ d) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$
e) $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ f) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$
g) $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$ h) $\cot x + 3\tan x = 2\sqrt{3}$

4. Bircins tənlikləri həll edin.

a) $\sin x + \cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ c) $\sin^2 x - 2\sin 2x + 3\cos^2 x = 0$

5. Dərəcəni azaltma düsturlarını tətbiq etməklə tənlikləri həll edin.

a) $4\sin^2\frac{x}{2} - 3 = 0$ b) $4\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0$

6. Tənliyin verilmiş aralıqda yerləşən köklərini tapın.

a) $3\tan^2 x - 1 = 0$, $0 \le x \le 360°$ b) $6\sin^2 x + 5 = 8$, $0 \le x \le 2\pi$
c) $4\cos^2 x - 1 = 2$, $0 \le x \le 2\pi$ d) $2\cos 2x + 3 = 2$ $0 \le x \le 360°$

7. Müxtəlif üsulları tətbiq etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\cos 3x - \cos x = 0$ b) $\sin 3x + \sin x = 0$
c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$ d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
e) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x = 0$ f) $\sin 2x = 2\cos^2 x$
g) $(1 + \tan x)\cdot\cos x = 0$ h) $(1 - \tan x)\cdot\sin 2x = 0$
i) $\sin x + 1{,}5\sin 2x = \sin^3 x$ j) $\cos x + \sin 2x = \cos^3 x$
k) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ l) $\sin 3x = 3\sin x$
m) $\sin 3x - 2\cos 2x = 3$ n) $\cos 4x + \sin x = 2$

8. Kalkulyatordan istifadə etməklə tənliklərin $0 \le x < 2\pi$ intervalında köklərinin təqribi qiymətini tapın.

a) $3 \tan x + 1 = 13$ b) $8 \cos x + 3 = 4$

c) $4 \sin x = -2 \sin x - 5$ d) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$

9. Tənlikləri həll edin.

1) $(\cot x - \sqrt{3})(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$
2) $2 \sin x - 1 = \csc x$
3) $\tan x - \cot x = 0$
4) $\csc^2 x - 2 \cot x = 0$
5) $2 \tan^2 x \cdot \sin x - \tan^2 x = 0$
6) $\sec^2 x \cdot \tan x = 2 \tan x$
7) $9 \sin^2 x - 6 \sin x + 1 = 0$
8) $(\tan x - 1)(\cos x - 1) = 0$
9) $\tan x + 1 = \sqrt{3} + \sqrt{3} \cot x$
10) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$
11) $\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x$
12) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 0$
13) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$
14) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

10. 1) $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ tənliyinin:

a) ən kiçik müsbət kökünü; b) ən böyük mənfi kökünü;

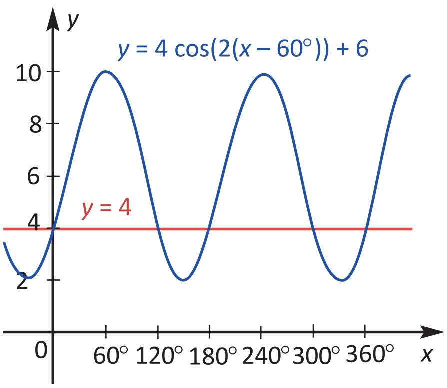
c) $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$ aralığında yerləşən köklərini tapın.

2) $\sin 3x \cdot \cos x = 1 + \sin x \cdot \cos 3x$ tənliyinin $(-\pi; \frac{\pi}{2})$ aralığında yerləşən köklərini tapın.

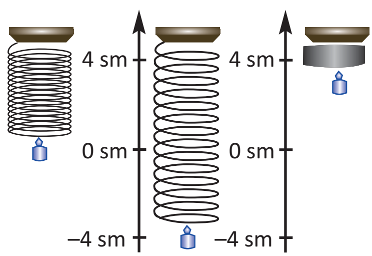
11. Funksiyaların qrafiklərini qurun. Qrafiklərin $0 \le x < 2\pi$ intervalında x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini yazın.

a) $y = 2 \sin x + 1$ b) $y = 2 \cos x - 1$

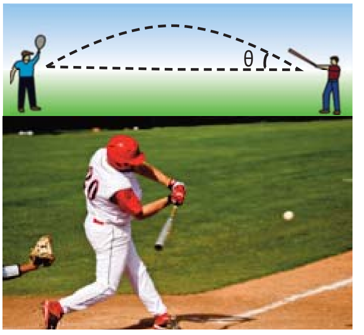
12. Şəkildə verilmiş qrafikə görə $4 \cos(2(x - 60°)) + 6 = 4$ tənliyinin həllini (təqribi) yazın.



13. Yaydan asılmış cismin rəqsi hərəkətini $d = 4 \sin \pi t$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Neçənci saniyədə yayın yerdəyişməsi 2 sm olacaq?



1. Beysbol topuna vurulan zərbə ilə topun qət etdiyi məsafənin v_0 başlanğıc sürətindən və θ meyl bucağından asılılığı $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ kimidir. Burada g sərbəstdüşmə təcilidir. Beysbol topuna vurulan zərbə ilə top v_0 = 30 m/san başlanğıc sürəti ilə hərəkət edərək 70 m aralıda dayanmış rəqib oyunçu tərəfindən tutulmuşdur. θ meyl bucağını tapın.

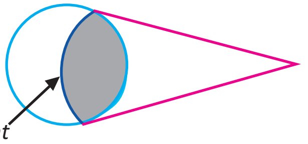


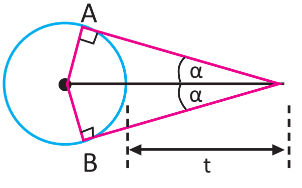
2. Mahir velosipedinin təkərinin balansını yoxlamaq istəyir. O, təkərin bağları üzərində işarə qoyaraq onu fırladır. Təkərin üzərindəki işarənin hərəkətini $h(t) = 42 + 18 \cos 3\pi t$ kimi ifadə etmək olar. Burada h hündürlüyü (sm-lə), t zamanı (saniyə ilə) göstərir.

a) t = 15 san olduqda işarə hansı hündürlükdə olacaq?

b) Neçənci saniyələrdə işarə 60 sm hündürlükdə olar?

3. **Kosmos.** Kommunikasiya məqsədləri üçün nəzərdə tutulmuş Yerin süni peykinin orbiti yer səthindən t mil məsafədədir. Yerin radiusu 3960 mildir. Təsəvvür edin ki, peyk Yer səthinin müəyyən hissəsini görüntüləyir. Şəkildə horizont çevrəsi ilə hüdudlanan bu hissə qara rənglə verilmişdir. Horizont çevrəsinə görə bəzi ölçüləri müəyyən etmək üçün şəkildən istifadə edin.



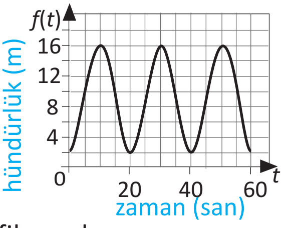


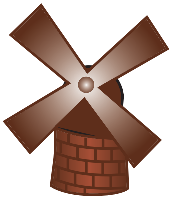
a) t-nin α-dan asılılıq düsturunu yazın.

b) α = 10° olarsa, t-ni tapın.

c) t = 30000 mil olarsa, α-nın qiymətini tapın. AB minor qövsünün uzunluğunu hesablayın. Yer kürəsini ekvator xətti boyu tam görüntüləmək üçün ən azı neçə belə peyk lazımdır?

4. Ədəbiyyat. İspan yazıçısı Migel de Servantesin məşhur romanının qəhrəmanı Don Kixot özünü çox güclü hesab edirdi və bir gün yel dəyirmanını dayandırmaq fikrinə düşür. Bunu bacarmayan Don Kixot dəyirmanın pərlərindən birinə ilişir və havada fırlanmağa başlayır. Triqonometrik funksiyaların köməyilə Don Kixotun düşdüyü vəziyyəti modelləşdirmək olar. Şəkildəki qrafik pərlə birlikdə fırlanan Don Kixotun yerdən hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərir.





1) Tələb olunan göstəriciləri qrafikə görə tapın və real situasiyaya uyğun izahını yazın: a) Amplitud; b) Period.

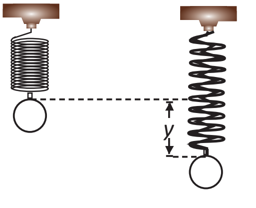
2) Funksiyanın düsturunu yazın.

3) Don Kixotun havada fırlanmasının altı tam dövrünə uyğun funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

4) Don Kixot hansı saniyələrdə yerdən 10 m hündürlükdə olar?

5) Pərin sürətinin zəifləməsi sinusoidal qrafikin formasına necə təsir göstərər?

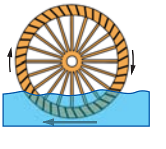
5. Harmonik rəqs. Yaydan asılmış cismin ağırlığı ilə yayın tarazlıq (sükünət) vəziyyətindən yerdəyişməsini $y = \frac{1}{12}(\sin\pi t - 3\cos\pi t)$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Burada t zamanı saniyə ilə, y yerdəyişməni metrlə göstərir. Yayın $0 \le t \le 1$ zaman intervalında tarazlıq nöqtəsində olduğu vaxtları tapın.



6. Su çarxlarından suyun hərəkət enerjisini faydalı enerjiyə çevirmək üçün istifadə edilir.

Çarxın balansını yoxlamaq üçün üzərinə mismar çalındı və fırladıldı. Mismar hərəkətin başlanğıcında ən hündür nöqtədə olmaqla su səthindən 3,5 m məsafədə, çarxın hərəkətilə 12 saniyə sonra ən aşağı nöqtədə-su səthindən 0,5 m aşağıda olur.

a) Mismarın su səthindən h hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən funksiyanın düsturunu yazın.



b) Hərəkətə başladıqdan 15 saniyə sonra mismar su səthindən hansı hündürlükdə olacaq?

c) Çarx hərəkətə başladıqdan neçə saniyə sonra mismar su səthindən 1,5 m hündürlükdə olacaq?

7. $f(x) = \sin x$ və $g(x) = \frac{1}{2}$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

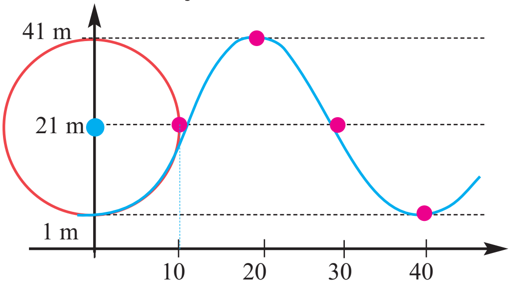
a) Kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapın.

b) x-in $[0;4\pi]$ aralığında götürülmüş hansı qiymətlərində f(x) funksiyasının qiymətləri g(x) funksiyasının uyğun qiymətlərindən böyükdür?

c) f(x) funksiyasının g(x) funksiyasının uyğun qiymətlərindən kiçik olduğu hər hansı aralığı göstərin.

8. Radiusu 20 m olan karusel hər 40 saniyədə bir tam dövr edir. Ən aşağıda yerləşən oturacaq yerdən 1 m hündürlükdədir.

Şəkildə məsələyə uyğun sxematik təsvir verilmişdir.

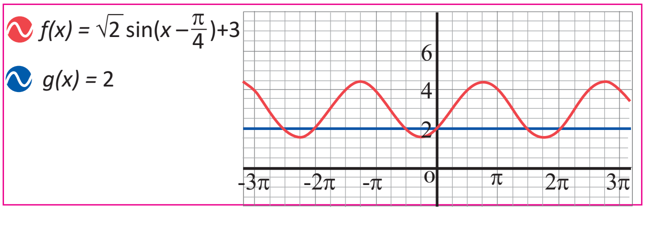


a) Bu oturacağa əyləşən şəxsin karuseldə fırlanarkən yerdən olan hündürlüyünün zamandan asılılığını göstərən funksiyanı $h(t) = a\cdot\sin b(t-c) + d$ şəklində yazın.

b)Karuselin bir tam dövrü ərzində hansı saniyələrdə bu şəxs yerdən 21 m və daha yüksək hündürlükdə olacaq?

9. $f(x) = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 3$ və $g(x) = 2$ funksiyalarının qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafiklərinə görə x-in $[-3\pi;3\pi]$ aralığından götürülmüş hansı qiymətlərində:

a) $f(x) = g(x)$; b) $f(x) > g(x)$; c) $f(x) < g(x)$ olduğunu müəyyən edin.



10. $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{6}) + 1$ və $g(x) = 2$ funksiyalarının qrafiklərini qrafkalkulyatorla qurun. x-in $[-3\pi; 3\pi]$ aralığından götürülmüş hansı qiymətlərində

a) $f(x) = g(x)$; b) $f(x) > g(x)$; c) $f(x) < g(x)$ olur?

1. Kalkulyatorla hesablayın.

a) $\cos^{-1}(-0,8)$ b) $\sin^{-1} 0,99$ c) $\tan^{-1} 12$ d) $\cos^{-1} 0,55$

2. Tənliklərin $[0; 2\pi)$ (və ya $[0; 360°)$) aralığındakı köklərini tapın.

a) $\sin(x + 60°) = \frac{1}{2}$ b) $\cos(x - 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

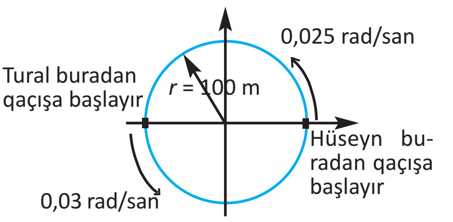
c) $\tan(x + 45°) = -1$ d) $\sin(x - 20°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ f) $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = 1$

3. Tənlikləri həll edin.

a) $2 \cot x + 1 = -1$
b) $5 \sec^2 x = 6 \sec x$
c) $4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0$
d) $\tan x - \cot x = 0$
e) $\sin x + 2 = 3$
f) $2 \cos^2 x - \cos x = 1$
g) $\tan^2 x - 4 \tan x + 4 = 0$
h) $\cos^2 x = \sin^2 x + 1$

4. Tural və Hüseyn eyni anda radiusu 100 m olan çevrə boyu qaçmağa başladılar. Tural şəkil üzərində qeyd edilmiş nöqtədən başlayaraq saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 0,03 radian/saniyə, Hüseyn isə qeyd edilmiş nöqtədən saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 0,025 radian/saniyə bucaq sürəti ilə qaçır.



Koordinat sistemini şəkildəki kimi seçməklə sualları cavablandırın.

a) 8 saniyə ərzində onlar nə qədər yol qaçmış olacaqlar?

b) Turalın t saniyə ərzindəki hərəkətinə uyğun dönmə bucağını t ilə ifadə edin.

c) 30-cu saniyədə onların olduqları nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edin.

d) Tural ilk dəfə neçənci saniyədə absisi 0 olan nöqtədə olacaq?

e) Hüseyn ilk dəfə neçənci saniyədə absisi 0 olan nöqtədə olacaq?

f) Tural neçənci saniyədə ilk dəfə Hüseyni ötüb keçəcək?

5. Tənliklərin $[0; 2\pi)$ aralığındakı köklərini tapın.

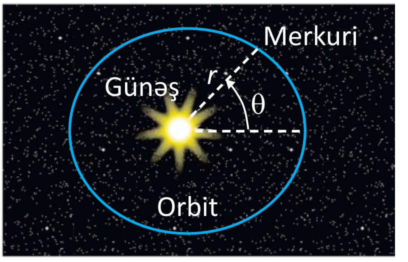
a) $2 \cos^2 x = \sin x$ b) $\sin^3 x - 5 \sin x = 0$

c) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$ d) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x$

e) $\tan(2x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{3}$ f) $\sin 3x - \cos 2x = 2$

6. Astronomiya. Merkuri planeti Günəş ətrafında ellips üzrə hərəkət edir. Onun Günəşdən məsafəsini aşağıdakı düsturla ifadə etmək olar:

$$r = \frac{3{,}44 \times 10^7}{1 - 0{,}206 \cos\theta}$$



θ bucağının hansı ən kiçik müsbət qiymətində Merkuri planeti ilə Günəş arasındakı məsafə 4×10^7 km olar?

7. Seçilmiş ərazidə çöl dovşanlarının sayının dəyişməsinin (onlarla bəslənən yırtıcıların çoxalmasına görə) zamandan asılığını $D(t) = 400\cos\frac{\pi t}{12} + 800$ kimi modelləşdirmək olar. D dovşanların sayını, t isə zamanı aylarla göstərir.

a) Dovşanların maksimum və minumum sayı nə qədər olur?

b) Cari ay üçün dovşanların sayı nə qədər olmalıdır?

c) Dovşanların sayı hansı ayda təxminən 1000 olmuşdur.

d) Funksiyanın qrafikini 2 illik dövr üçün çəkin.

8. Bir il ərzində toplanan məlumatların araşdırılması nəticəsində şəhərdə gündüz saatlarının uzunluğunun aşağıdakı asılılıqla dəyişdiyi müəyyən edilmişdir.

$$D(x) = \frac{38}{3} - \frac{11}{3}\cos\frac{2\pi}{365}x$$

Burada x ilə günlərin ilin əvvəlindən hesablanan nömrəsi işarə olunub.

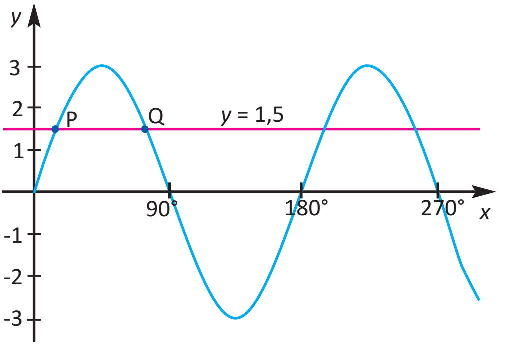
a) Yanvarın 1-də, martın 22-də, noyabrın 5-də gündüz vaxtının uzunluğu neçə saatdır?

b) Hansı tarixlərdə gündüz vaxtının uzunluğu 11 saatdır?

9. Qrafik $y = a \cdot \sin bx$ şəklindəki funksiyanın qrafikidir.

a) Qrafikə görə a və b -nin qiymətlərini tapın.

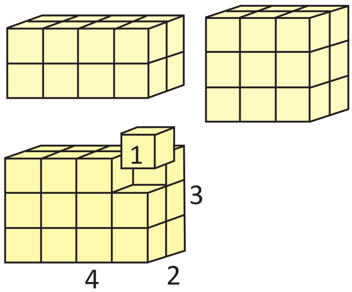
b) Qrafikin $y = 1{,}5$ düz xətti ilə kəsişdiyi P və Q nöqtələrinin absislərini tapın.



8 Fəza fiqurlarının həcmi

Araşdırma. Kublarla müxtəlif ölçülü prizmalar quraşdırın və ya onların şəklini çəkin. Ən azı dörd prizma quraşdırın.
1. Fərz edin ki, prizmanı təşkil edən hər kubun tərəfinin uzunluğu 1 vahid, hər üzü 1 kvadrat vahid, həcmi 1 kub vahiddir.
2. Prizmalara görə cədvəldəki məlumatları müəyyən edin və onu doldurun.
3. Prizmanın oturacağının sahəsi və hündürlüyü ilə həcmi arasında hansı əlaqəni aşkar etdiniz?
4. Konstruksiyaların küncündən bir kubu çıxarın, alınan kuboidin üstdən, öndən və yandan görünüş şəkillərini çəkin.

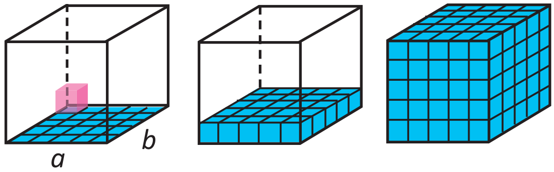
Prizma	Oturacağının sahəsi	Hündürlüyü	Həcmi
1.			
2.			
3.			
4.			



Cismi sonlu sayda üçbucaqlı piramidalara ayırmaq olarsa, ona sadə cisim deyilir. Sadə cisimlər üçün həcm - ədədi qiyməti aşağıdakı xassələri ödəyən müsbət kəmiyyətdir:
1) Konqruyent cisimlərin həcmləri bərabərdir.
2) Tili uzunluq vahidinə bərabər olan kubun həcmi kub vahidə bərabərdir.
3) Cisim sadə cisimlərlə hissələrə ayrılırsa, onda bu cismin həcmi onun hissələrinin həcmləri cəminə bərabərdir.
Həcmləri bərabər olan cisimlərə müadil (eyni böyüklükdə) cisimlər deyilir.

Tilinin uzunluğu a olan kubun həcmi: $\mathbf{V = a^3}$

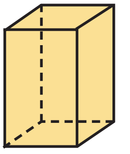
Ölçüləri natural ədədlər olduqda düzbucaqlı paralelepipedin həcmi ədədi qiymətcə onu təşkil edən vahid kubların sayına bərabərdir.



Ölçüləri istənilən həqiqi ədəd olduqda da göstərilir ki, düzbucaqlı paralelepipedin həcmi onun üç ölçüsünün hasilinə bərabərdir:

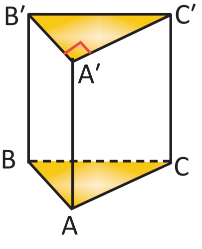
$$\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$$

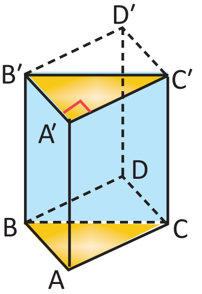
Həcm düsturunda $a \cdot b$ hasili oturacağın sahəsi, c isə hündürlük olduğundan onu belə də ifadə etmək olar: $\mathbf{V = S_{ot}}\boldsymbol{h}$



Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

İstənilən düz prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Bu təklifin doğru olduğunu oturacağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizma üzərində göstərək.



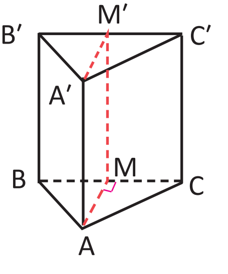


Oturacaqlardakı düzbucaqlı üçbucaqları düzbucaqlıya tamamlamaqla, prizmanı da düzbucaqlı paralelepipedə tamamlayaq. Alınan düz prizmanın həcmi $V = AB \cdot AC \cdot AA'$ olar.

Prizmanın oturacağının diaqonalından keçən $BB'C'C$ müstəvisi prizmanı iki konqruyent üçbucaqlı prizmaya bölür. Deməli, oturacağı düzbucaqlı üçbucaq olan düz prizmanın həcmini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$V = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot AA' = S_{ot}h$$

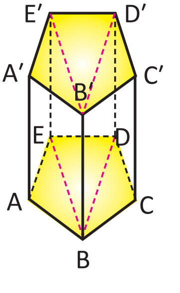
Prizmanın oturacağı istənilən ABC üçbucağı olduqda, bu üçbucağın hündürlüklərindən eləsini çəkək ki, qarşı tərəfi onun daxili nöqtəsində kəssin: $AM \perp BC$.



AA' tilindən keçməklə BC tilinə perpendikulyar olan müstəvi bu prizmanı hündürlükləri eyni, oturacaqları düzbucaqlı üçbucaq olan iki prizmaya ayırır. Verilən prizmanın həcmi bu prizmaların həcmləri cəminə bərabərdir.

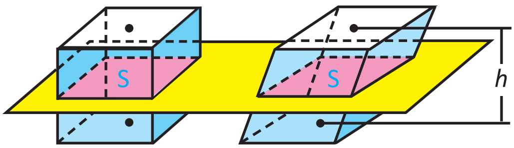
Deməli, oturacağı istənilən üçbucaq olan düz prizmanın da həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

Düz prizmanın oturacaqları ixtiyari çoxbucaqlı olarsa, bu prizmanı oturacağı üçbucaq olan düz prizmalara ayırıb həcmlərini toplamaqla verilən prizmanın həcmini hesablamaq olar.



Həcmlər haqqında Kavalyeri prinsipi. İki cismi verilən müstəviyə paralel istənilən müstəvi ilə kəsdikdə alınan fiqurların sahələri bərabər olarsa, bu cisimlərin həcmləri bərabərdir.

Bu prinsipi italyan riyaziyyatçısı Bonaventura Kavalyeri (1598-1647) aşkar etmişdir.

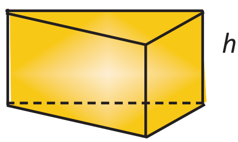


Prizmanın həcmi

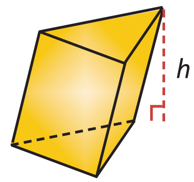
Prizmanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

$$V = S_{ot}h$$

Düz prizma



Mail prizma

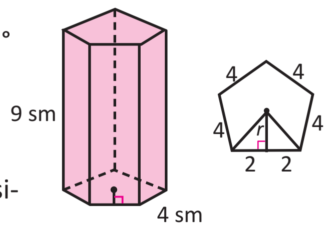


Nümunə. Oturacağının tərəfinin uzunluğu 4 sm, yan tilinin uzuznluğu 9 sm olan düzgün beşbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

Həlli:

Düzgün beşbucaqlının mərkəzi bucağı 360 : 5 = 72° olduğundan apofemi

$$r = \frac{2}{\tan 36^\circ}$$



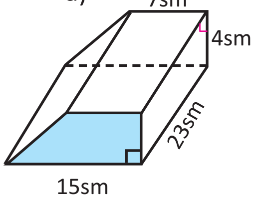
Düzgün çoxbucaqlının sahəsi perimetri ilə apofemi hasilinin yarısına bərabərdir.

$$S_{ot} = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{\tan 36^\circ} = \frac{20}{\tan 36^\circ} \qquad V = S_0 \cdot h = \frac{180}{\tan 36^\circ} \approx 248\ (\text{sm}^3)$$

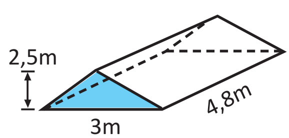
Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə verilənlərə görə düz prizmaların həcmini hesablayın.

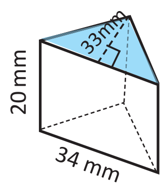
a)



b)



c)



2. Cədvəldə verilənlərə görə sual işarəsinin yerindəki ölçüləri tapın.

Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri	Qiymətləri					
uzunluğu a	6	20	2	3	?	8
eni b	4	30	5	?	8	2
hündürlüyü c	3	15	?	4	2	?
S_{yan}	?	?	?	40	40	60
S_{tam}	?	?	?	?	?	?
V	?	?	60	?	?	?

3. 8 sm × 15 sm × 40 sm ölçüdə düzbucaqlı paralelepiped şəkilli metal blok bütünlüklə 1 sm × 1,5 sm × 2 sm ölçülü metal lövhələrdən ibarətdir. Metal bloka neçə belə lövhə işlədilmişdir.

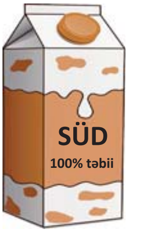
4. Paralelepipedin həcmi necə dəyişər?

a) Ölçülərindən biri iki dəfə artsa;

b) İki ölçüsünün hər biri iki dəfə artsa;

c) Hər üç ölçüsü iki dəfə artsa.

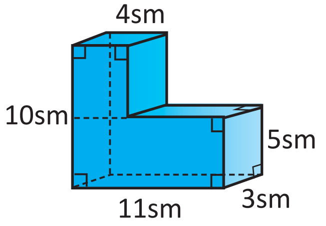
5. Süd məhsulları istehsalı ilə məşğul olan şirkət yeni satış kampaniyası üçün qiymətini saxlamaqla süd qutularının tutumunu 25% artırmağı planlaşdırır. Qutunun yalnız hündürlüyünü dəyişməklə buna necə nail olmaq olar?

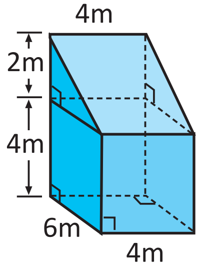


6. a) Düzbucaqlı paralelepipedin üç üzünün sahələri 2 sm^2, 3 sm^2, 6 sm^2-dir. Bu paralelepipedin həcmini tapın.
b) Ölçüləri 3 sm, 4 sm və 5 sm olan düzbucaqlı paralelepipedin hər tilini x sm artırdıqda səthi 54 sm^2 artır. Həcmin nə qədər artdığını tapın.

7. Düz prizmanın oturacağı kvadratdır. Onun yan tilinin uzunluğu oturacağın tərəfindən 3 dəfə böyükdür, tam səthinin sahəsi isə 350 m^2-dır. Prizmanın həcmini tapın.

8. Mürəkkəb fiqurların həcmlərini hesablayın.

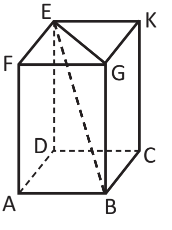
a) 

b) 

9. Sahəsi 2 dm^2 olan romb düz paralelepipedin oturacağıdır. Diaqonal kəsiklərinin sahələri 9 dm^2 və 16 dm^2-dir. Paralelepipedin həcmini tapın.

10. Yan üzünün diaqonalı 5 m, özünün diaqonalı isə 7 m olan düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

11. Şəkildəki düz prizmanın oturacağı kvadratdır. S_{ABCD}=24 sm^2, $\angle BEG = 60°$ olarsa, prizmanın həcmini tapın.

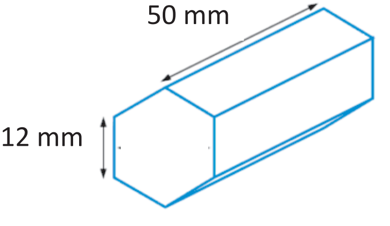


12. Düzgün üçbucaqlı prizmanın yan səthinin sahəsi 48 sm^2, hündürlüyü isə 8 sm-dir.
a) Oturacağın tərəfinin uzunluğunu tapın. b) Prizmanın həcmini tapın.

13. Düz üçbucaqlı prizmada oturacağın tərəfləri 4 sm, 5 sm, 7 sm, yan tili isə oturacağın böyük hündürlüyünə bərabərdir. Prizmanın həcmini tapın.

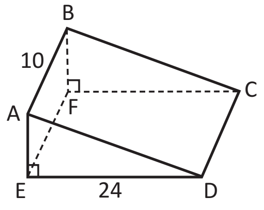
14. Düzgün üçbucaqlı prizmanın bütün tillərinin uzunluqları x-ə bərabərdir. Onun həcminin $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^3$ olduğunu göstərin.

15. Düzgün altıbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

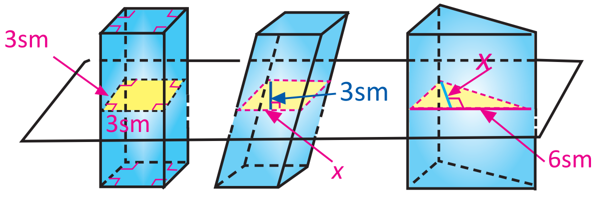


16. Düzgün altıbucaqlı prizmanın oturacağının tərəfi $6\sqrt{3}$ sm, hündürlüyü 4 sm-dir. Prizmanın yan səthini və həcmini tapın.

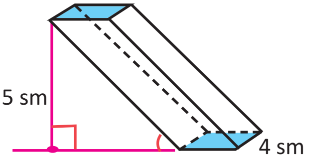
17. Şəkildəki ABCD düzbucaqlısı formasında olan meylli sahənin torpağı çıxarılaraq CDEF düzbucaqlısı şəklində düz sahəyə çevrilmişdir.
AB = 10 m, ED = 24 m-dir. Sahə 10 m^2 azalmışsa, bu ərazidən neçə kub metr torpaq çıxarılmışdır?



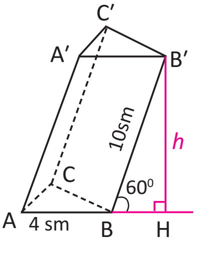
18. Fiqurların həcmləri və hündürlükləri bərabərdir. Prizmaların *x* ilə işarə edilmiş ölçülərini müəyyən edin.



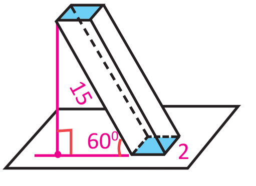
19. Oturacağı kvadrat olan mail prizmanın həcmini tapın.



20. Mail prizmanın oturacağı tərəfi 4 sm olan bərabərtərəfli üçbucaqdır. Prizmanın yan tilinin uzunluğu 10 sm olub,oturacaq müstəvisi ilə 60° bucaq əmələ gətirir. Bu prizmanın həcmini tapın.



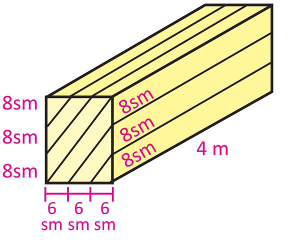
21. Tərəfi 2 vahid olan kvadrat mail prizmanın oturacağıdır. 15 vahid uzunluqda olan yan til oturacaq müstəvisi ilə 60°-li bucaq əmələ gətirir. Prizmanın həcmini tapın.



22. a) Göstərin ki, mail prizmanın həcmi perpendikulyar kəsiyin sahəsi ilə yan tilinin hasilinə bərabərdir: $V = S_{\perp} \cdot l_{yan}$
Göstəriş: Prizmanın yan tilinə perpendikulyar kəsik müstəvisi ilə oturacaq müstəvisi arasındakı bucağın mail prizmanın yan tilıi ilə hündürlüyü arasındakı bucağa bərabər olduğunu nəzərə alın.
b) Mail üçbucaqlı prizmanın yan tilləri 20 sm, perpendikulyar kəsiyinin tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm-dir. Prizmanın həcmini tapın.

23. Düzgün üçbucaqlı prizmanın bütün tilləri eyni uzunluqdadır. Prizmanın həcmi $16\sqrt{3}$ sm^3 olarsa, bir tilinin uzunluğu neçə santimetrdir?

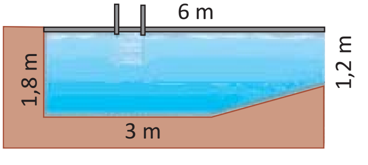
24. Uzunluğu 4 m, eni 18 sm, qalınlığı 24 sm olan şalban şəkildə göstərilən qaydada paralel müstəvilərlə 6 hissəyə ayrılmışdır. Hər bir hissənin həcmini tapın.



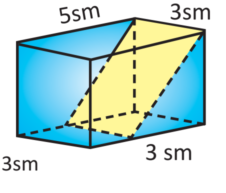
25. Düzgün altıbucaqlı prizmanın hündürlüyü *h*, oturacağının tərəfi isə *a*-ya bərabərdir. Onun həcminin $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h$ olduğunu göstərin.

26. Düzbucaqlı paralelepipedin en və uzunluq ölçüləri 20% kiçildilmişsə, hündürlüyü neçə faiz artırılmalıdır ki, həcmi dəyişməsin?

27. Uzunluğu 10 m olan hovuzun en kəsiyinin şəkildə verilmiş ölçülərinə görə tapın:
a) Hovuz neçə ton ($1m^3$ = 1 ton) su tutur ?
b) Dolu hovuz iki eyni boru ilə 4 saata boşaldıldı. Hər boru dəqiqədə neçə kub metr su boşaltdı?

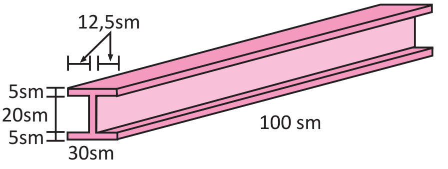


28. Şəkildə qapağı içinə düşmüş qutu təsvir edilmişdir. Qapağın sahəsi 15 sm^2-dır.
a) Qutunun 3-cü ölçüsünü tapın.
b) Qapağın qutudan ayırdığı kiçik qapalı hissənin həcmini tapın.
c) Qutunun ağzı açıq böyük hissəsinin həcmini tapın.

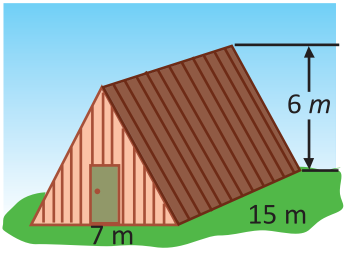


29. a) İsbat edin ki, düzbucaqlı paralelepipedin diaqonalının kvadratı onun üç ölçüsünün kvadratları cəminə bərabərdir: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
b) $a = 3$, $b = 4$, $d = 13$ olduqda düzbucaqlı parlelepipedin həcmini tapın.

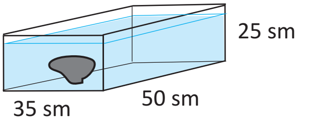
30. Metalın sıxlığının 7860 kq/m^3 olduğunu bilərək şəkildəki konstruksiyanın ümumi kütləsini hesablayın.



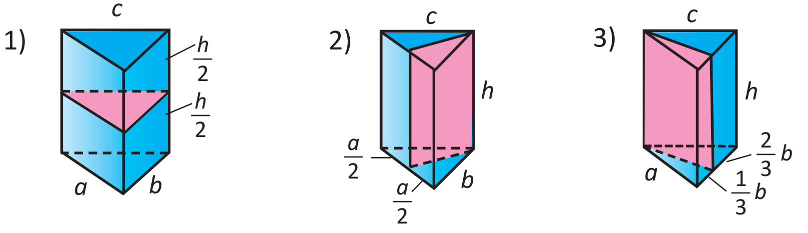
31. Şəkildəki taxıl anbarı hansı fəza fiqurunun formasındadır? Onun neçə üzü, neçə tili var? Verilən ölçülərinə görə anbarın həcmini hesablayın.



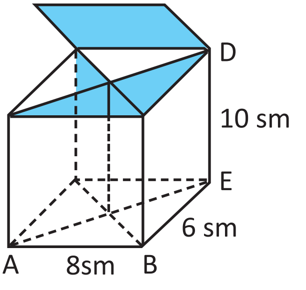
32. Ölçüləri şəkildə göstərildiyi kimi olan qabın içərisinə atılan daşla suyun səviyyəsi 0,5 sm qalxdı. Daşın həcmini tapın.



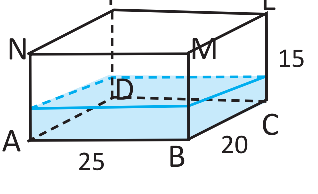
33. Şəkildə verilənlərə görə düz üçbucaqlı prizmada müstəvi kəsiyinin ayırdığı fiqurların həcmlərini müqayisə edin.



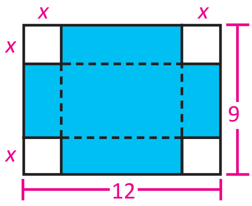
34. Hədiyyə qutusu şəkildə göstərildiyi kimi kartonla 4 hissəyə bölünmüşdür. Hər hissənin həcmini tapın. Verilən ölçülərə görə qutunu hazırlamaq üçün nə qədər karton lazım olduğunu hesablayın.

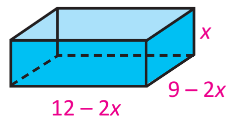


35. Ölçüləri 15sm×20sm×25sm olan düzbucaqlı paralelepiped şəkilli qabdakı suyun hündürlüyü h_1-dir. Qabı BCEM üzünə çevirdikdə onun hündürlüyü h_2, ABMN üzünə çevirdikdə isə h_3 olur.
$h_1 + h_2 + h_3 = 24$ sm olarsa, qabda neçə litr su olduğunu müəyyən edin.



36. Kiçik layihə işi.





İnformatika. $9\,\text{sm} \times 12\,\text{sm}$ ölçülü kartonun künclərindən kvadratlar kəsilib çıxarılır. Qırıq xətlər boyu kartonu qatladıqda karton qutu formasını alır. Qutunun maksimum həcmdə olması üçün o hansı ölçülərdə olmalıdır?

Qutunun həcmini x dəyişəni ilə ifadə edək.

$$V = (12 - 2x)(9 - 2x)\,x$$

Verilən kartondan qutu düzəltmək üçün x-in qiymətləri 0 və $\frac{9}{2}$ arasında dəyişə bilər: $0 < x < 4{,}5$. Aşağıdakı kompüter proqramı x-in 10 qiyməti üçün həcmi hesablamışdır.

```
10    PRİNT    "X", "HƏCM"
15    PRİNT
20    FOR  X = 0  TO  4,5 STEP 0,5
30    LET   V = (12 – 2*X) (9 – 2*X) *X
40    PRİNT  X,  V
50    NEXT  X
60    END
```

X	HƏCM
0	0
0,5	44
1	70
1,5	81
2	80
2,5	70
3	54
3,5	35
4	16
4,5	0

Sağ tərəfdə çap edilmiş məlumat x-in 1,5 qiymətində həcmin maksimum olduğunu göstərir. Həmçinin həcmin maksimum qiymətinin 81 olduğu da tapılmışdır.

Proqramın icra edilmiş hissəsinə görə aşağıdakıları yerinə yetirin.

a) Daha dəqiq hesablamalar aparmaq üçün proqramın x-in qiymətlərini dəyişən komandasını elə seçin ki, x-in qiymətləri 1-dən 2-yə qədər 0,1 addımla dəyişsin.

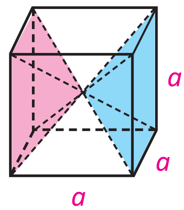
b) 20-ci komandanı elə dəyişin ki, həcmin qiyməti 0,1 sm^3 dəqiqliklə hesablanılsın.

c) Həcmin maksimum qiymətinə uyğun qutunun ölçülərini yazın (en, uzunluq, hündürlük).

d) Kompüter proqramını kartonun ölçüləri 8 sm × 20 sm olan hal üçün yazın və kompüterdə işləməsini təmin edin.

e) Verilən proqramın (proqramlaşdırma dilini dəyişə bilərsiniz) kompüterdə işləməsini təmin etmək üçün lazımı işləri yerinə yetirin.

Araşdırma. 1. Kubun diaqonalları onu altı konqruyent piramidaya ayırır. Hər bir piramidanın oturacağı kubun üzüdür, hündürlüyü isə $\frac{1}{2}$ a-ya bərabərdir.



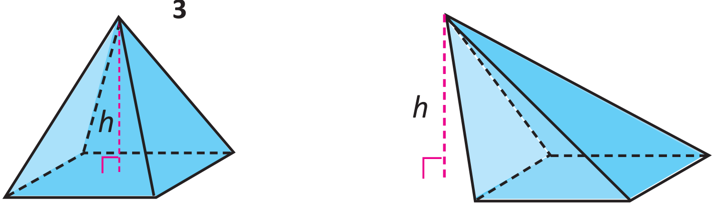
a) Hər bir piramidanın həcminin $V = \frac{1}{6}a^3$ olduğunu izah edin.

b) Hər bir piramidanın həcminin $V = \frac{1}{3} S_{ot}\, h$ olduğunu izah edin.

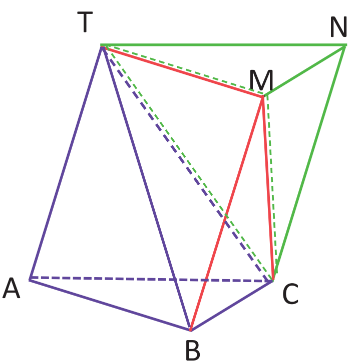
Piramidanın həcmi

Piramidanın həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} S_{ot}h}$$



Tutaq ki, TABC- təpəsi T, oturacağı ABC olan üçbucaqlı piramidadır. Bu piramidanı üçbucaqlı prizmaya tamamlayaq. Alınan prizma üç piramidadan:
1) Verilmiş TABC piramidasından, 2) TCNM və 3) TMBC
piramidalarından ibarətdir. 2-ci və 3-cü piramidaların oturacaqları konqruyentdir: $\Delta CNM \cong \Delta MBC$ və T təpəsindən çəkilmiş hündürlükləri ortaqdır. Buna görə də onların həcmləri bərabərdir. 1-ci və 3-cü piramidaların da oturacaqları konqruyentdir: $\Delta TAB \cong \Delta BMT$ və C təpəsindən çəkilən hündürlükləri ortaqdır. Buna görə onların da həcmləri bərabərdir. Onda verilmiş piramidanın həcmi $\frac{1}{3}$ $S_{ot}h$-a bərabərdir.

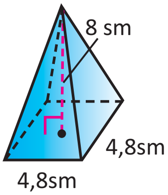


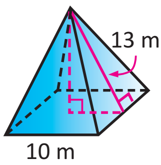
İxtiyari piramidanın oturacağını üçbucaqlara ayırıb, alınmış üçbucaqlı piramidaların həcmlərini tapıb cəmləməklə verilmiş piramidanın həcmini hesablamaq olar. Beləliklə, ixtiyari piramidanın həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir:

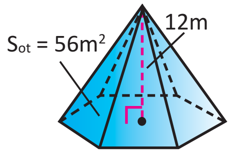
$$V = \frac{1}{3}S_{ot}h$$

Öyrənmə tapşırıqları

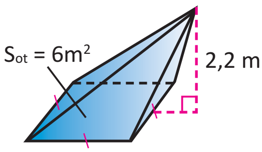
1. a) Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidaların həcmini tapın.

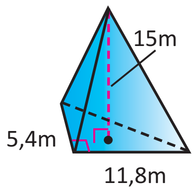




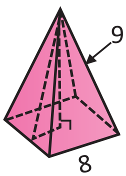


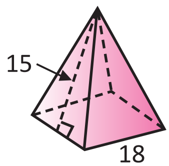
b)Şəkildə verilənlərə görə piramidaların həcmini tapın.

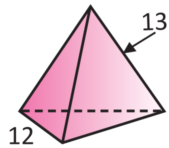




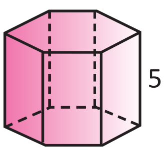
2. Verilənlərə görə düzgün piramidaların həcmini tapın.

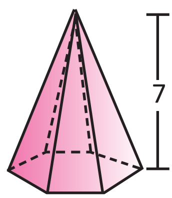






3. Prizma və piramidanın oturacaqları konqruyent fiqurlardır. Prizmanın hündürlüyü 5 vahid, piramidanın hündürlüyü 7 vahiddir. Bu fiqurların həcmləri nisbətini tapın.



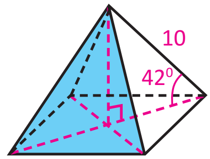


4. Yan tillərinin hər biri 25 mm olan piramidanın oturacağı düzbucaqlıdır. Bu düzbucaqlının tərəfləri 18 mm və 24 mm-dir. Piramidanın həcmini tapın.

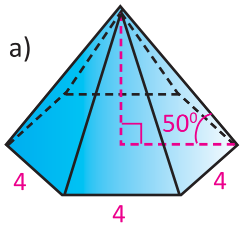
5. Yan tillərinin hər biri 13 sm olan piramidanın oturacağı tərəfləri 6 sm, 8 sm və 10 sm olan üçbucaqdır. Piramidanın həcmini tapın.

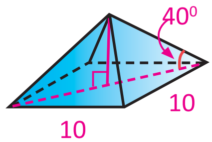
6. Düzgün üçbucaqlı piramidanın apofemi 10 sm, oturacağının tərəfi $12\sqrt{3}$ sm-dir. Piramidanın həcmini tapın.

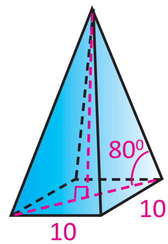
7. Şəkildə verilənlərə görə düzgün piramidanın həcmini hesablayın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



8. Düzgün piramidaların həcmini tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

a)


b)


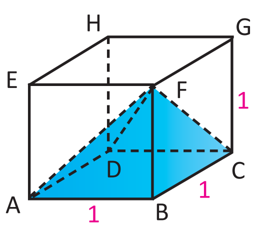
c)


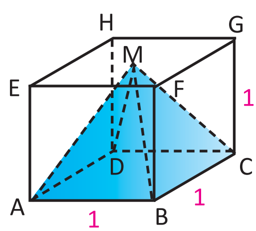
9. Piramidanın oturacağı tərəfi 3 sm olan rombdur. Piramidanın yan üzlərinin hər biri oturacaq müstəvisi ilə 45° bucaq əmələ gətirir. $S_{yan}=12$ sm^2 olarsa, piramidanın həcmini tapın.

10. Üçbucaqlı piramidanın bir tili 6 sm, qalan tillərin hər biri 5 sm-ə bərabərdir. Piramidanın həcmini tapın.

11. Konqruyent kubların daxilinə iki müxtəlif piramida, F-ABCD və M-ABCD çəkilmişdir. M-ABCD piramidasının M təpəsi EFGH kvadratının mərkəzindədir.

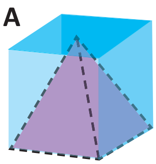
a) Hansı piramidanın həcmi daha böyükdür?
b) Hansı piramidanın tam səthinin sahəsi daha böyükdür?

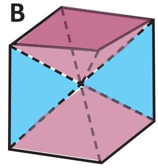




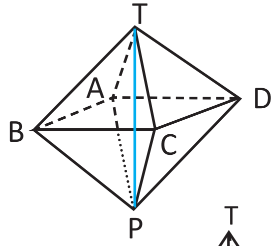
12. Üçbucaqlı piramidanın bir-birinə perpendikulyar olan yan üzlərinin sahələri 24 dm^2, 16 dm^2, 12 dm^2-dir. Piramidanın həcmini tapın.

13. İki konqruyent kubun daxilinə çəkilmiş piramidaların oturacaqları kubun üzləridir. B şəklindəki piramidaların təpə nöqtəsi kubun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindədir. B şəklindəki piramidanın həcminin A şəklindəki piramidanın həcminə nisbətini tapın.

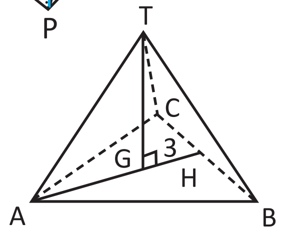
A


B


14. Şəkildəki düzgün oktaedrin tillərinin uzunluqları cəmi 18 vahiddir. Oktaedirin həcmini tapın.

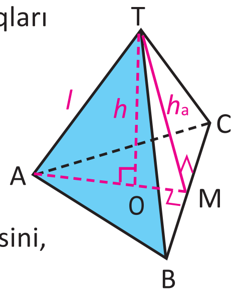


15. G nöqtəsi düzgün tetraederin oturacağının ağırlıq mərkəzidir (medianların kəsişmə nöqtəsi). GH = 3 sm olduğuna görə piramidanın həcmini tapın.

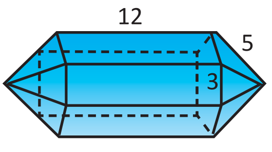


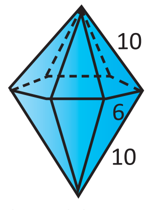
16. TABC düzgün üçbucaqlı piramidadır. Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) AM = 9 və TM = 5 olarsa, *h* və *l*-i tapın.
b) BC = 6 olarsa, AO və AM-i tapın.
c) *h* = 4, *l* = 5 olarsa, BC, OM və AM-i tapın.
Yan səthinin sahəsini və həcmini tapın.
d) AB = 12, TA = 10 olarsa, apofemi, yan səthinin sahəsini, həcmi tapın.

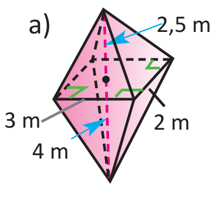


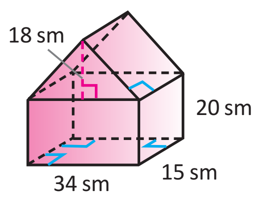
17. Şəkildə mineral kristalları təsvir edilmişdir. Həcmini hesablayın.

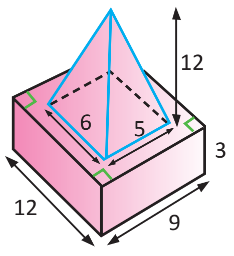
a)


b)


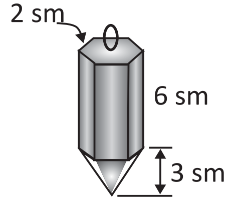
18. Şəkildə verilənlərə görə fiqurların həcmini hesablayın.

a)


b)


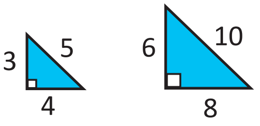
c)


19. Şaqul adlanan alətdən inşaat işində şaquli xətlərin düzgünlüyü yoxlamaq üçün istifadə edilir. Şəkildəki şaqul düzgün altıbucaqlı prizmadan və piramidadan ibarətdir. Alətin həcmini tapın.



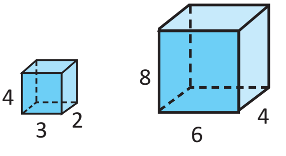
Oxşar fiqurlar formaca eyni olub, uyğun ölçüləri mütənasibdir.

Məsələn, şəkildəki düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardır. Çünki, uyğun tərəflərinin nisbətləri bərabərdir.



$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

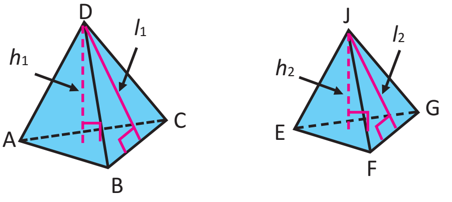
Şəkildəki düzbucaqlı paralelepipedlər də oxşardır, çünki uyğun xətti ölçüləri nisbətləri bərabər olmaqla uyğun üzləri oxşar düzbucaqlılardır.



$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

Oxşar fiqurlar

Çevrilmədə istənilən iki nöqtə arasındakı məsafə eyni ədəd dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə oxşarlıq çevrilməsi deyilir. Oxşarlıq çevrilməsi ilə biri digərinə çevrilən fiqurlara oxşar fiqurlar deyilir. Oxşarlıq əmsalı ixtiyari iki uyğun nöqtələr cütü arasındakı məsafələrin nisbətinə bərabərdir.

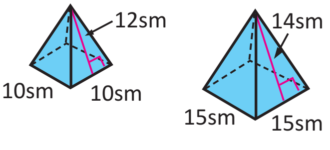


$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CA}{GE} = \frac{AD}{EJ} = \frac{BD}{FJ} = \frac{CD}{GJ} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} = k$$

Uyğun xətti ölçülərin nisbətlərini göstərən ədədə oxşarlıq əmsalı deyilir.

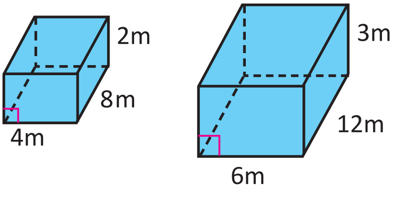
$\Delta ABC \sim \Delta EFG$, $\Delta ABD \sim \Delta EFJ$,
$\Delta BCD \sim \Delta FGJ$, $\Delta ACD \sim \Delta EGJ$

Nümunə. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadığını göstərin.



$$\frac{10}{15} = \frac{10}{15} \neq \frac{12}{14}$$

Oxşar fiqurlar deyil



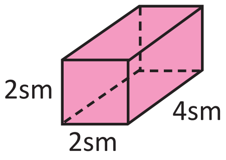
$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Oxşar fiqurlardır

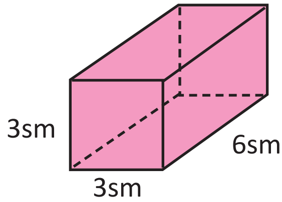
Araşdırma. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadığını göstərin.

A və B prizmaları (düzbucaqlı paralelepipedləri) oxşarlıq əmsalı $\frac{2}{3}$ olan oxşar prizmalardır.

A prizması



B prizması



Bu prizmaların
a) tam səthlərinin sahələrinin nisbətini;
b) həcmlərinin nisbətini tapın.

a) A prizmasının tam səthi

$S_{tam} = Ph + 2S_{ot} =$
$= 12\cdot 2 + 2\cdot 8 = 40$ (sm^2)

B prizmasının tam səthi

$S_{tam} = Ph + 2S_{ot} =$
$= 18\cdot 3 + 2\cdot 18 = 90$ (sm^2)

A prizmasının tam səthinin B prizmasının tam səthinə olan nisbəti:

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

b) A prizmasının həcmi

$V = S_{ot}h = 8 \cdot 2 = 16$ (sm^3)

B prizmasının həcmi

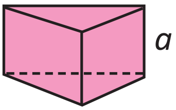
$V = S_{ot}h = 18 \cdot 3 = 54$ (sm^3)

A prizmasının həcminin B prizmasının həcminə olan nisbəti:

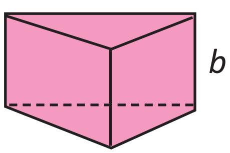
$$\frac{16}{54} = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Oxşar fiqurların səthləri və həcmləri

Əgər iki fəza fiqurunun oxşarlıq əmsalı k olarsa, bu fiqurların səthlərinin (yan, tam, oturacaq) sahələri nisbəti k^2-na, həcmlərinin nisbəti isə k^3-na bərabər olar.



A fiquru



B fiquru

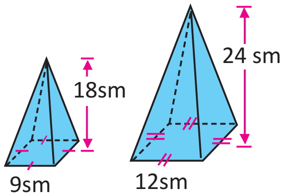
Oxşarlıq əmsalı: $\frac{a}{b} = k$

$$\frac{S_{tamA}}{S_{tamB}} = \frac{a^2}{b^2} = k^2, \qquad \frac{V_A}{V_B} = \frac{a^3}{b^3} = k^3$$

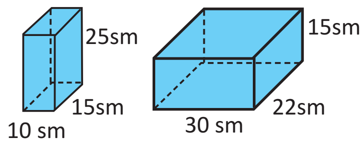
Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən fiqurların oxşar olub-olmadıqlarını müəyyən edin.

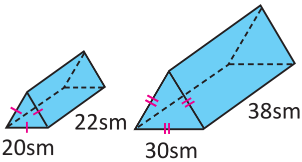
a)



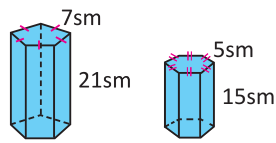
b)



c)

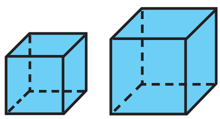


d)



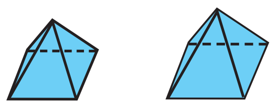
2. İki fiqur oxşardır. Verilənlərə görə oxşarlıq əmsalını tapın.

a)



$S_1 = 2$ sm^2 $S_2 = 32$ sm^2

b)



$V_1 = 216$ sm^3 $V_2 = 343$ sm^3

3. İki oxşar prizmanın hündürlükləri nisbəti 5 : 3 kimidir. Bu prizmaların:
a) yan səthlərinin sahələri nisbətini tapın.
b) həcmləri nisbətini tapın.

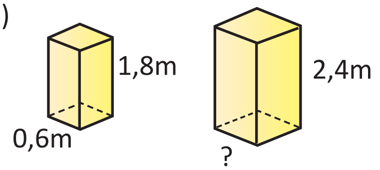
4. A və B düzgün dördbucaqlı piramidaları oxşardır. A piramidasının oturacağının tərəfi 6 sm, həcmi 48 sm^3-dur. B piramidasının oturacağının tərəfi 12 sm-dir.
a) B piramidasının həcmini tapın.
b) Yan səthlərinin nisbətini tapın.
c) Hər bir piramidanın tam səthinin sahəsini tapın.

5. İki kubdan birinin diaqonalı $\sqrt{3}$ sm, digərininki $4\sqrt{3}$ sm-dir. Bu kubların həcmləri fərqini tapın.

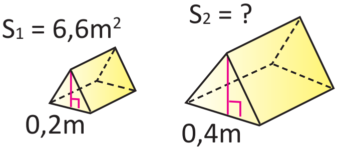
6. İki oxşar piramidanın həcmləri 2 və 54 kub vahiddir. Aşağıdakı nisbətləri tapın.
a) hündürlüklərinin b) apofemlərinin
c) oturacaqlarının sahələrinin d) tam səthlərinin

7. Fiqurların oxşar olduqlarını bilərək, verilənlərə görə tələb edilən ölçüləri tapın.

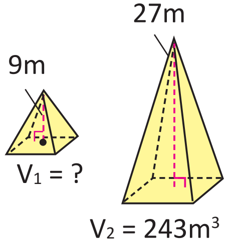
a)



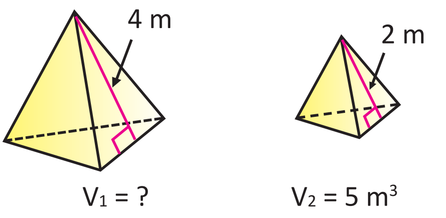
b)



c)



d)



8. İki oxşar fiqurun səthlərinin sahəsi və böyük fiqurun həcmi verilmişdir. Kiçik fiqurun həcmini tapın.

a) $S_1 = 18$ sm^2
$S_2 = 72$ sm^2
$V_2 = 344$ sm^3

b) $S_1 = 192$ m^2
$S_2 = 1728$ m^2
$V_2 = 4860$ m^3

c) $S_1 = 52$ dm^2
$S_2 = 208$ dm^2
$V_2 = 192$ dm^3

9. İki oxşar fiqurun həcmləri və kiçik fiqurun səthinin sahəsi verilmişdir. Böyük fiqurun səthinin sahəsini tapın.

a) $V_1 = 27$ sm^3
$V_2 = 125$ sm^3
$S_1 = 63$ sm^2

b) $V_1 = 5$ m^3
$V_2 = 40$ m^3
$S_1 = 4$ m^2

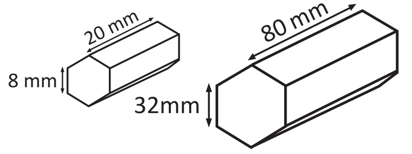
c) $V_1 = 54$ sm^3
$V_2 = 128$ sm^3
$S_1 = 18$ sm^2

10. İki oxşar piramidanın hündürlükləri 1:3 nisbətindədir. Piramidaların yan səthlərinin fərqi 96 m^2 olarsa, kiçik piramidanın yan səthinin sahəsini tapın.

11. Yuyucu toz istehsal edən şirkət eyni növ tozun qablaşdırıldığı qutuları müəyyən miqyasla böyütməklə tozu müxtəlif tutumlu qutulara qablaşdırır. Tutumu 450 qram olan qutunun ölçüləri 1:2 miqyası ilə mütənasib olaraq böyüdülmüşdür. Yeni qutunun tutumunu tapın.

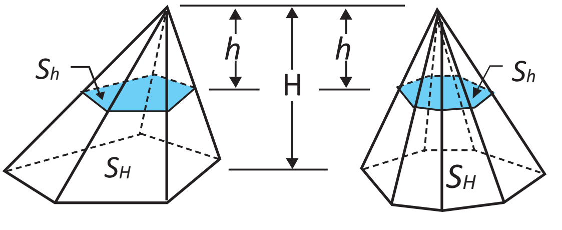
12. Təyyarə modeli real təyyarəyə görə 1:200 miqyasla hazırlanmışdır. Modelə işlənən boyanın miqdarı ilə real təyyarəyə işlənən boyanın miqdarını müqayisə edin.

13. Misdən hazırlanmış düzgün altıbucaqlı formasındakı detallar oxşardır. Misin sıxlığı 8,6 q/sm^3, 1 kq misin qiyməti 2,55 manatdır. Detalı istehsal edən şirkət hər bir detal (böyüklüyündən asılı olmayaraq) üçün ona sərf olunan materialın qiymətinin 125%-i qədər istehsal məsrəfləri əlavə edərək detalın istehsal dəyərini müəyyənləşdirir. Satış qiyməti isə istehsal dəyərinin üzərinə şirkətin 22% gəliri əlavə edilməklə formalaşdırılır. Hər detalın satış qiymətini tapın.



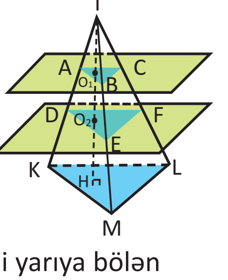
14. Yeni avtomobil dizayn edilərkən əvvəlcə avtomobilin müəyyən miqyasla gildən modeli hazırlanır. Reallıqda uzunluğu 5 m olan avtomobilin gil modelinin uzunluğu 10 sm-dir. Modelin səthinin sahəsinin real avtomobilin səthinin sahəsinə nisbətini tapın.

Piramidanın oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilməsindən alınan kiçik piramida verilən piramidaya oxşardır. Oxşarlıq əmsalını istənilən uyğun xətti ölçülərinin nisbətinə görə tapmaq olar. Məsələn, şəkildəki piramidaların hündürlükləri verilmişdir. Onların səthlərinin, oturacaqlarının və ya tam səthlərinin sahələrinin nisbəti hündürlüklərinin nisbətinin kvadratına bərabərdir.



$$\frac{S_{kiç}}{S_{böy}} = \frac{h^2}{H^2}$$

15. Şəkildəki düzgün üçbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfi 8 sm, hündürlüyü 12 sm-dir. Piramida T təpəsindən başlayaraq 4 sm və 6 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilir. Kəsikdə alınan çoxbucaqlıların perimetrlərini tapın.



16. Hündürlüyü H olan piramidanın oturacağına paralel və həcmini yarıya bölən kəsiyinin təpədən məsafəsini tapın.

17. Oturacağa paralel müstəvilər piramidanın hündürlüyünü 3 bərabər hissəyə bölmüşdür. Piramidanın həcmi hansı nisbətlərdə bölünmüşdür

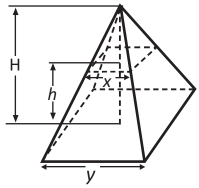
Araşdırma. Qədim misirlilər düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın həcminin $V = \frac{1}{3}h(x^2 + xy + y^2)$ düsturu ilə hesablandığını bilirdilər. Lakin onların bu düsturu necə aldıqları məlum deyil. Bu düsturu aşağıdakı addımlarla alın.

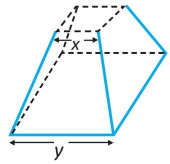
a) Oturacağının tərəfi y vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini yazın.

b) Oturacağı tərəfi x vahid olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmini yazın.

c) H və h hündürlükləri arasındakı asılılığın $H = \dfrac{yh}{y - x}$ kimi olduğunu göstərin.

d) Göstərin ki, kəsik piramidanın həcmi $V = \frac{1}{3}h(x^2 + xy + y^2)$ düsturu ilə hesablanır.

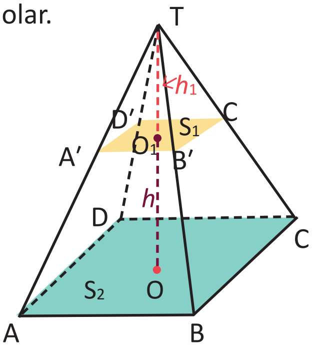




Kəsik piramidanın həcmi

Kəsik piramidanın həcmini verilən tam piramida ilə oturacağa paralel kəsiklə ayrılan kiçik piramidanın həcmləri fərqi kimi tapmaq olar.

$$V = \frac{1}{3}S_2(h_1 + h) - \frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$$



Burada V kəsik piramidanın həcmi, S_2 və S_1 böyük və kiçik piramidaların oturacaqlarının sahəsidir. h kəsik piramidanın hündürlüyü, h_1 kiçik piramidanın hündürlüyüdür. Bu piramidalar oxşar olduqlarına görə oturacaqlarının sahələri nisbətləri hündürlükləri nisbətinin kvadratına bərabərdir. Bu bərabərlikdən kiçik piramidanın hündürlüyünü tapaq:

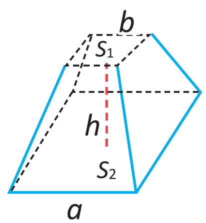
$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_1}{h_1 + h}\right]^2, \quad \frac{h_1}{h_1 + h} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}, \quad h_1\sqrt{S_2} = (h_1 + h)\sqrt{S_1}, \quad h_1 = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}}$$

h_1-in ifadəsini $V = \frac{1}{3}[(S_2 - S_1)h_1 + S_2h]$ bərabərliyində nəzərə alaq:

$$V = \frac{1}{3}\left[(S_2 - S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}} + S_2h\right] = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_1})h\sqrt{S_1} + S_2h] =$$

$$= \frac{1}{3}(h \cdot \sqrt{S_1S_2} + h\,S_1 + h\,S_2) = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

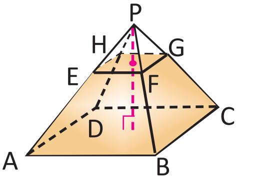
$$V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$



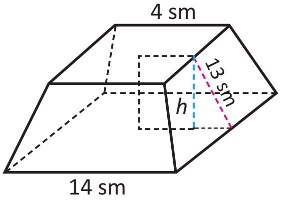
Oturacaqlarının sahəsi S_1 və S_2, hündürlüyü h olan kəsik piramidanın həcmi $\mathbf{V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)}$ düsturu ilə hesablanır.

Öyrənmə tapşırıqları

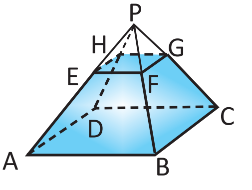
1. Hündürlüyü 9 sm, oturacağının tərəfi 6 sm olan düzgün dördbucaqlı piramida təpədən 3 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilmişdir.
a) Verilən piramidanın həcmini tapın.
b) Kəsilib ayrılan kiçik piramidanın həcmini tapın.
c) Kəsik piramidanın həcmini tapın.



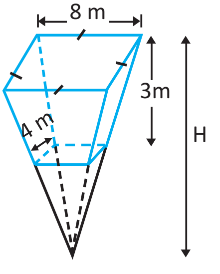
2. Şəkildə verilənlərə görə düzgün dördbucaqlı kəsik piramidanın yan səthini, tam səthini və həcmini tapın.



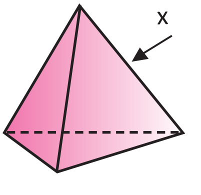
3. Piramidanın oturacağına paralel keçirilən müstəvi onun hündürlüyünü təpədən başlamaqla 1:2 nisbətində bölür. Alınan kəsik piramidanın həcmi 208 kub vahid olarsa, verilən piramidanın həcmini tapın.



4. Hündürlüyü H olan piramidanın oturacağına paralel müstəvi kəsiyi nəticəsində alınan kəsik piramidanın ölçüləri şəkildə verildiyi kimidir.
a) Piramidanın H hündürlüyünü tapın.
b) Kəsik piramidanın həcmini tapın.
c) Şəkildəki kəsik piramıda ölçülərində su hovuzu tikmək istəsəniz, qazıb çıxarılan torpağı daşımaq üçün neçə 6 m^3-luq maşın lazımdır?
d) Hovuz neçə litr su tutur?
e) Hovuz tutumunun yarısı qədər su ilə doldurulduqda suyun dərinliyi nə qədər olur?

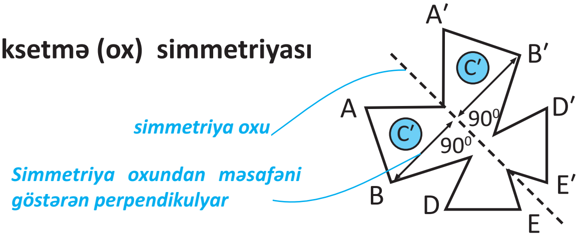


5. Düzgün tetraderin tilinin uzunluğu *x*-lə işarə edilmişdir.
a) Tetraedrin həcmini *x* dəyişəni ilə ifadə edin.
b) Tetraedrin yan tillərinin ortasından keçən müstəvi ilə ayrılan kəsik piramidanın həcmini x dəyişəni ilıə ifadə edin.

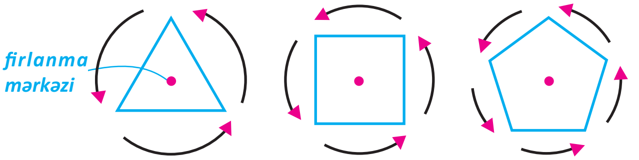


Müstəvidə simmetriya

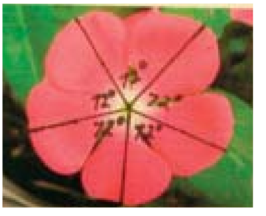
Əksetmə (ox) simmetriyası



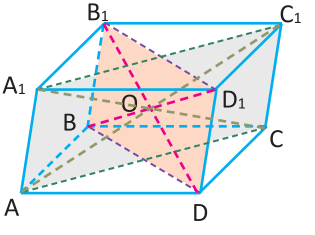
Fırlanma simmetriyası



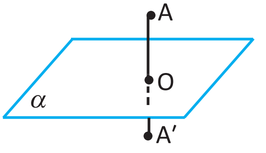
3 tərtibli   4 tərtibli   5 tərtibli

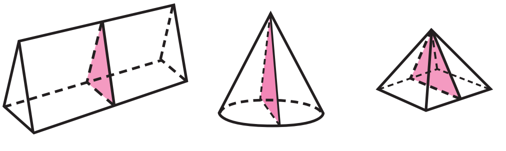


Fəzada simmetriya. Fəza fiqurları üzərində də müxtəlif simmetriyalar müşahidə etmək olar. Paralelepipedin diaqonal kəsikləri paraleloqram olduğundan aydındır ki, BD_1 və DB_1 diaqonalları bir O nöqtəsində kəsişib, yarıya bölünür. Göstərmək olar ki, digər diaqonallar da O nöqtəsində kəsişir və yarıya bölünürlər. Deməli, paralelepipedin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir.



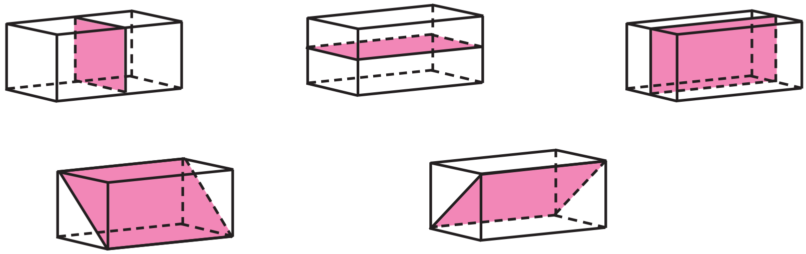
Fəzada nöqtə və düz xəttə nəzərən simmetriyadan başqa müstəviyə nəzərən simmetriyaya da baxılır. α müstəvisi AA′ parçasının ortasından keçib, ona perpendikulyardırsa, A və A′ nöqtələrinə α müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtələr deyilir. Fiqurun nöqtələrinə müəyyən müstəviyə görə simmetrik olan nöqtələr də bu fiqura aiddirsə, həmin müstəviyə fiqurun simmetriya müstəvisi, fiqura isə müstəviyə nəzərən simmetrik fiqur deyilir.



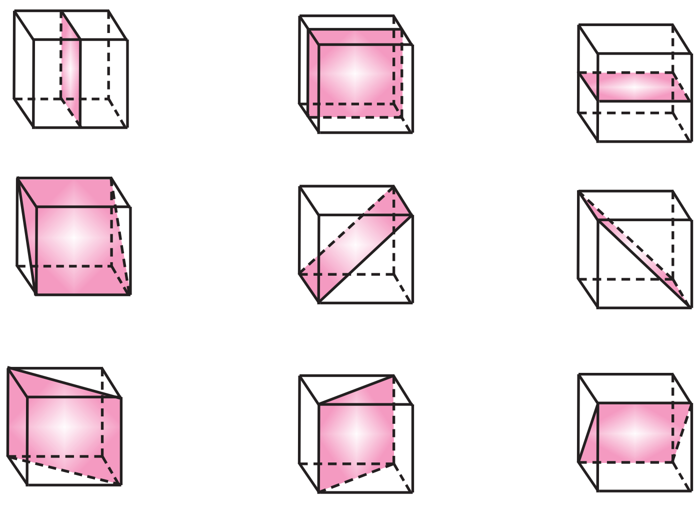


Xətti ölçüləri müxtəlif olan düzbucaqlı paralelepipedin simmetriya mərkəzindən başqa üç simmetriya oxu və üç simmetriya müstəvisi var. Qarşı üzlərin diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətt onun simmetriya oxudur, tilinin ortasından keçib, ona perpendikulyar olan müstəvi simmetriya müstəvisidir.

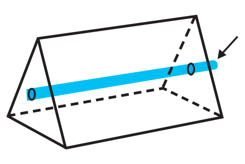
İki xətti ölçüsü bərabər olan düzbucaqlı paralelepipedin 5 simmetriya müstəvisi var. Bu təsvirləri dəftərinizdə çəkin.

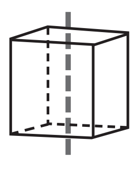


Kubun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi onun simmetriya mərkəzidir. Bir üzə aid olmayan paralel tillərin orta nöqtələrindən keçən düz xətlər (bunların sayı 6-dır) və qarşı üzlərin mərkəzlərindən keçən düz xətlər (bunların sayı 3-dür) kubun simmetriya oxlarıdır.
Kubun 9 simmetriya müstəvisi var və bunlar şəkildə təsvir edilmişdir.

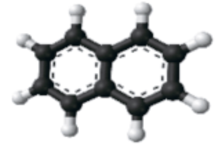


Fırlanma simmetriyası. Fəza fiqurlarının fırlanma simmetriyası da müstəvi fiqurlara oxşardır. Lakin fəza fiqurlarında fırlanma simmetriyası oxa görə təyin edilir.



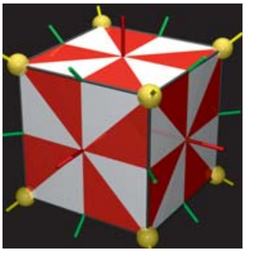


Naftalin: $C_{10}H_8$



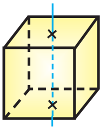
Fırlanma və əksetmə simmetriyası maddələrin molekulyar quruluşunun öyrənilməsində geniş tətbiq edilir.

Öyrənmə tapşırıqları

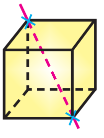


1. Şəkildə kubun simmetriya (fırlanma) oxları göstərilmişdir. Bu oxlar həndəsi olaraq sözlə verilmişdir. Kubun şəkli üzərində mümkün təsvirləri çəkib göstərin. Hər hal üçün bir şəkil nümunə olaraq verilmişdir.

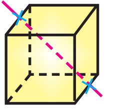
a) Simmetriya (fırlanma) oxu iki qarşı üzün mərkəzini birləşdirir, hər bir halda 4 üst-üstə düşmə müşahidə edilir;



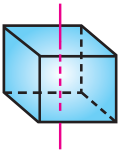
b) Fırlanma oxu kubun diaqonalını üzərində saxlayan düz xətdir, hər bir halda 3 üst-üstə düşmə müşahidə edilir;



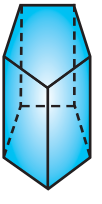
c) Fırlanma oxu iki qarşı tilin ortalarından keçən düz xəttdir, hər bir halda 2 üst-üstə düşmə müşahidə edilir.



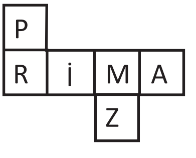
2. Kub iki qarşı üzünün mərkəzindən keçən ox ətrafında bir tam dönmədə neçə dəfə öz-özü ilə üst-üstə düşər?

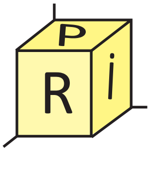


3. Şəkildəki düzgün beşbucaqlı prizma oturacaqların mərkəzindən keçən ox ətrafında neçə dərəcə döndükdə öz-özü ilə üst-üstə düşər?

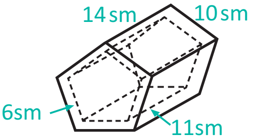


4. Üzərində hərflər yazılmış kubu iki qarşı üzün mərkəzindən keçən ox ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə 270° döndərsəniz, hansı tərəfdən (yuxarıdan, öndən, yandan) hansı hərf görünəcək? Bütün hallara baxın.

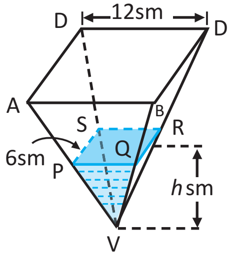




1. Şəkildəki qapalı qutu düzgün beşbucaqlı prizma şəklindədir. Qutunun oturacağının tərəfi xaricdən 10 sm, daxildən 6 sm-dir. Qutunun hündürlüyü isə xaricdən 14sm, daxildən 11sm-dir. Tələb edilənləri tapın.
a) Qutunun xarici səthinin (tam) sahəsini
b) Qutunun daxili səthinin (tam) sahəsini
c) Qutunun tutumunu

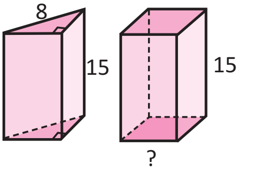


2. Oturacağı kvadrat olan piramidanın içində 60 sm^3 su vardır. Şəkildə verilən ölçülərə görə tapın:
a) suyun h hündürlüyünü;
b) Qabın dolması üçün nə qədər su əlavə edilməlidir?



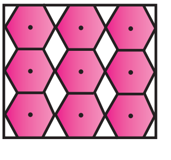
3. İki oxşar piramidanın səthlərinin sahələri nisbəti 1 : 25 kimidir. Bu piramidaların həcmləri nisbətini tapın.

4. Hündürlükləri 15 sm olan düz üçbucaqlı prizma və düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmləri bərabərdir. Üçbucaqlı prizmanın oturacağı hipotenuzu 8 sm olan bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqdır. Dördbucaqlı prizmanın tam səthinin sahəsini tapın.



5. **Açıq tipli sual.** Oxşarlıq əmsalı $\frac{2}{5}$ olan iki oxşar piramida və iki oxşar paralelepiped çəkin. Ölçülərini üzərində yazın.

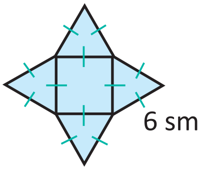
6. Şəkildə hündürlüyü 40 sm olan bir qutuya yığılmış düzgün altıbucaqlı prizmaların üstdən görünüşü verilmişdir. Düzgün altıbucaqlının oturacağının tərəfi 4 sm olarsa, qutunun boş qalmış hissəsinin həcmini müəyyən edin.



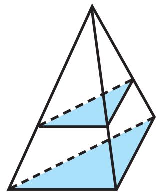
7. Düz üçbucaqlı prizmada oturacağın sahəsi 4 sm^2, yan üzlərin sahələri 9 sm^2, 10sm^2 və 17 sm^2-dır. Prizmanın həcmini tapın.

8. Piramidanın oturacağına paralel olan kəsiyin sahəsi oturacağının sahəsinin 0,36 hissəsinə bərabərdir. Bu kəsik piramidanın həcmini hansı nisbətdə bölür?

9. Piramidanın açılış şəklinə görə onun həcmini tapın.

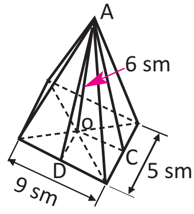


10. Piramida oturacağına paralel müstəvi ilə həcmləri bərabər olan iki hissəyə ayrılmışdır. Piramidanın hündürlüyü 12 sm olarsa,kiçik piramidanın hündürlüyünü tapın.



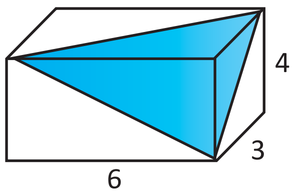
11. Həcmi 64 sm^3 olan düzbucaqlı paralelepiped formasında qutunun ölçülərinin hansı tam qiymətlərində onu hazırlamaq üçün ən az karton işlədilmiş olar? Variantları araşdırın.

12. Şəkildə oturacağı düzbucaqlı olan piramida və ölçüləri verilmişdir. Piramidanın həcmini və tam səthinin sahəsini tapın.

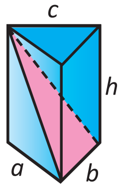


13. a) Yan tili 10 sm, oturacağının tərəfi 6 sm olan düzgün altıbucaqlı piramidanın həcmini tapın.

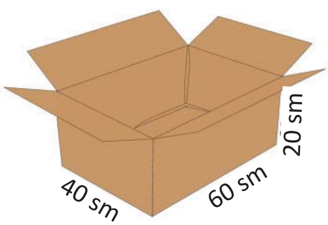
b) Düzbucaqlı paralelepipeddən müstəvi kəsiyi ilə şəkildə göstərildiyi kimi piramida ayrılmışdır. Piramidanın həcmi ilə paralelepipedin həcmini müqayisə edin.



14. Şəkildə verilənlərə görə düz üçbucaqlı prizmada:
a) müstəvi kəsiyinin sahəsini tapın;
b) müstəvi kəsiyinin ayırdığı fiqurların həcmini müqayisə edin.



15. Tilinin uzunluğu 2 sm olan 5000 kub şəkildə verilən ölçülərdəki qutuya yerləşirmi?



16. Sinif otağınızın həcmini təxmin edin. Müəyyən ölçüləri addımlarınızla təxmini olaraq tapa bilərsiniz. Otağın hündürlüyünü boyunuza görə təxmin edin. Dəqiq ölçmələr aparmaqla təxminlərinizi yoxlayın.

9 Üstlü və loqarifmik funksiyalar

Həqiqi üstlü qüvvət
Üstlü funksiya
***e* ədədi**
Ədədin loqarifmi
Loqarifmik funksiya
Loqarifmin xassələri
Loqarifmik şkala və məsələ həlli
Üstlü tənliklər
Loqarifmik tənliklər
Üstlü bərabərsizliklər
Loqarifmik bərabərsizliklər

Arxeoloji qazıntılar zamanı qalıqların yaşını tərkibindəki Karbon 14 maddəsinin miqdarını hesablamaqla müəyyən edirlər. Bunun üçün üstlü tənliklər həll edilir.

Şəmkir şəhərində aparılan qazıntıların üzə çıxardığı qədim şəhər

Praktik məşğələ

1) $\sqrt{2}$ -nin kalkulyatorla tapılmış qiymətini yazın.

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$

2) Hədləri $\sqrt{2}$ -nin əskiyi ilə götürülmüş onluq yaxınlaşmaları olan ardıcıllıq qurun:
1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; ...

3) Qüvvət üstü bu ardıcıllığın hədləri olmaqla 3-ün uyğun qüvvətləri ardıcıllığını yazın:
3^1; $3^{1,4}$; $3^{1,41}$; $3^{1,414}$; $3^{1,4142}$; $3^{1,41421}$; $3^{1,414213}$; ...

4) Bu ardıcıllığın rasional üstlü qüvvət şəklində olan hədlərinin qiymətlərini kalkulyatorla hesablayın.

$$3^1 = 3$$
$$3^{1,4} \approx 4,6555367217$$
$$3^{1,41} \approx 4,7069650017$$
$$3^{1,414} \approx 4,7276950353$$
$$3^{1,4142} \approx 4,7287339302$$
$$3^{1,41421} \approx 4,7287858809$$
$$3^{1,414213} \approx 4,728801462$$

5) Qüvvətin üstü $\sqrt{2}$-yə daha yaxın olduqca, uyğun qüvvətlərin hər sonrakı addımda əvvəlkindən daha az fərqləndiyinə və müəyyən bir ədədə yaxınlaşdığına diqqət edin. Bu ədədə 3-ün $\sqrt{2}$ (irrasional) üstlü qüvvəti deyilir.
Kalkulyatorla hesablama: $3^{\sqrt{2}} \approx 4,7288043878$

6) Tapşırığı $2^{\sqrt{3}}$ üçün yerinə yetirin.

Oxşar qayda ilə a^α irrasional üstlü qüvvətə baxılır. α irrasional ədədinin

α_1; α_2; α_3; ...

onluq yaxınlaşmaları ardıcıllığına uyğun olaraq

a^{α_1}; a^{α_2}; a^{α_3}; ...

ardıcıllığı qurulur və bu ardıcıllığın hədlərinin yaxınlaşdığı ədəd a^α ilə işarə olunur.
İrrasional üstlü qüvvət də rasional üstlü qüvvət kimi müsbət əsaslar üçün təyin olunub.
Beləliklə, istənilən x həqiqi ədədi üçün a^x (burada $a > 0$) həqiqi üstlü qüvvət anlayışı daxil edilir.
Hesab edilir ki, istənilən x üçün $1^x = 1$ və $x > 0$ olduqda $0^x = 0$.
Rasional üstlü qüvvətin məlum xassələri həqiqi üstlü qüvvət üçün də doğrudur.

Qüvvətin xassələri:
İstənilən x, y həqiqi ədədləri və $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ ədədləri üçün aşağıdakılar doğrudur:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $a > 1$, $x > y$ olduqda $a^x > a^y$, $0 < a < 1$, $x > y$ olduqda $a^x < a^y$

7) $a > b$, $x > 0$ olduqda $a^x > b^x$, $a > b$, $x < 0$ olduqda $a^x < b^x$

8) $a^x = a^y$ isə, onda $x = y$

Öyrənmə tapşırıqları

1. İrrasional üstlü qüvvət daxil olan ifadənin qiymətini təqribi olaraq hesablamaq üçün kalkulyatordan istifadə edilir.
Kalkulyator üzərində ^ klavişi irrasional üstlü qüvvəti də hesablama imkanı verir.
Hesablayın.
a) $8^{\sqrt{3}}$ b) $5^{-\sqrt{11}}$ c) $(\sqrt{10})^{\sqrt{2}}$ d) 9^{π} e) $15^{\sqrt{5}}$ f) $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$

2. Hər bir qaydaya uyğun bir nümunə yazın.

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ b) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ c) $(a^x)^y = a^{xy}$

d) $(ab)^x = a^x b^x$ e) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ f) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3. a) 3-ün qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{3^{2n} \cdot 3^{1+n}}{81^{n-1}}$

b) 2-nin qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{32 \cdot 8^x}{16^x}$

c) 5-in qüvvəti ilə ifadə edin: $\frac{25^x \cdot 5^{3x}}{125^{2+x}}$

4. Kalkulyatorun köməyilə verilən ifadələrin təqribi qiymətlərini tapın. Vergüldən sonra 5 rəqəm saxlayın.

$2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$, $2^{1,41421}$, $2^{1,414213}$

Verilən ifadələr rasional üstlü qüvvətlərdir. Bu ifadələrdən $2^{\sqrt{2}}$ irrasional üstlü qüvvəti hesablamaq üçün necə istifadə etmək olar?

5. Sadələşdirin və qiymətini hesablayın.

a) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$ b) $((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}$ c) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \cdot 4^{\sqrt{3}+2} : 2^{2\sqrt{3}}$

d) $3^{\sqrt{2}} \cdot 9^{\sqrt{2}+1} : 27^{\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[4]{2^{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot 4^{-\sqrt{3}}}$ f) $\sqrt[3]{5^{(\sqrt{2}+1)^2} \cdot 25^{-\sqrt{2}}}$

g) $\sqrt[4]{3^{(\sqrt{7}+1)^2} : 9^{\sqrt{7}}}$ h) $\sqrt[5]{0{,}2^{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} \cdot 25^{\sqrt{6}}}$ i) $(2^{(2+\sqrt{2})^2} : 4^3)^{\sqrt{2}}$

6. Müqayisə edin.

a) $10^{\sqrt{5}}$ ilə $10^{\sqrt{3}}$ b) $0{,}1^{\sqrt{3}}$ ilə $0{,}1^{\sqrt{2}}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ ilə $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ d) $(\sqrt{3})^{-4}$ ilə $(\sqrt{3})^{-2}$

7. Hansı münasibət doğrudur?

a) $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$ b) $2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$
c) $1 < 5^{\sqrt{2}} < 5$ d) $4^{\sqrt{2}} < 4^{\sqrt{3}} < 4^{\sqrt{5}}$

8. Verilmiş ədədləri 1 ilə müqayisə edin.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{3}}$ b) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{4}{3}}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ d) $2^{-\sqrt{3}}$

9. Ədədləri artan sıra ilə düzün.

a) 8^{200}; 9^{150}; 125^{100} b) $(0{,}008)^{50}$; $(0{,}09)^{75}$; $(0{,}5)^{150}$

c) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0{,}1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0{,}2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$; d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{4}{3}}$

10. İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $100^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ b) $\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(8^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

11. Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək, rasional üstlü qüvvət şəklində yazın və sadələşdirin.

a) $\sqrt{m^6n^4}$ b) $\sqrt[3]{8x^3y^6}$ c) $\sqrt[5]{a^{10}b^2} \cdot \sqrt[5]{b^3}$ d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

12. Həndəsi silsilədə $b_2 = \sqrt[5]{3}$ və $b_3 = \sqrt[5]{81}$ olduğunu bilərək, silsilə vuruğunu tapın.

13. Artan sıra ilə düzün: $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{-\sqrt{3}}$; $a^{-\sqrt{2}}$; a^0; a^{π}

a) $a > 1$ olduqda b) $0 < a < 1$ olduqda

14. Tənlikləri həll edin.

a) $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ e) $\sqrt[3]{x^2+2} + 1 = 4$

b) $6x^{\frac{2}{3}} + 12 = 36$ f) $x^2 + 2 = 2\sqrt{x^2+5}$

c) $\frac{1}{5}\sqrt{x^3} = 5{,}4$ g) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 2$

d) $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 3 = 0$ h) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = 2$

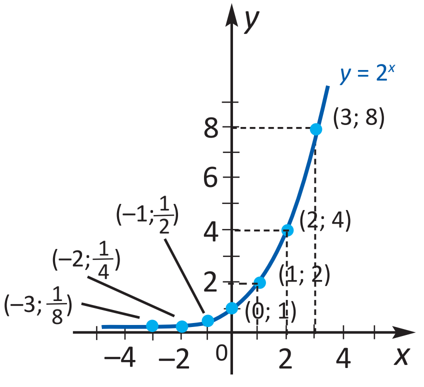
Praktik məşğələ

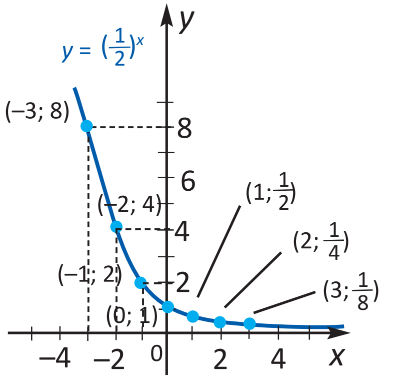
1) $y = 2^x$ və $y = (\frac{1}{2})^x$ funksiyaları üçün qiymətlər cədvəli tərtib edin.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = (\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

2) Absisi arqumentin, ordinatı funksiyanın cədvəldəki uyğun qiymətinə bərabər olan nöqtələri koordinat müstəvisində qurun və bu nöqtələrdən keçməklə səlis əyri çəkin.





3) İstənilən x üçün 2^x və $(\frac{1}{2})^x$ ifadələrinin qiymətlərini “0” -la müqayisə edin.

4) x-in qiymətləri böyüdükcə, $y = 2^x$ funksiyasının qiymətləri böyüyür, yoxsa kiçilir? x-in qiymətləri böyüdükcə, $y = (\frac{1}{2})^x$ funksiyasının qiymətləri böyüyür, yoxsa kiçilir?

5) Qrafiklər y oxunu hansı nöqtədə kəsir?

6) Qrafikləri müqayisə edin, onların oxşar və fərqli cəhətlərini qeyd edin.

7) Tapşırıqları $y = 3^x$ və $y = (\frac{1}{3})^x$ funksiyaları üçün də yerinə yetirin.

Üstlü funksiya

$a > 0$, $a \neq 1$ olduqda, $y = a^x$ funksiyasına üstlü funksiya deyilir.

1) Üstlü funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.

$$D(a^x) = (-\infty; +\infty)$$

2) Üstlü funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğudur.

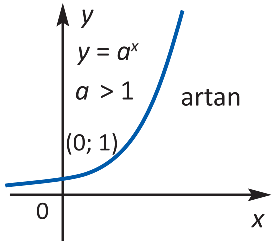
$$E(a^x) = (0; +\infty)$$

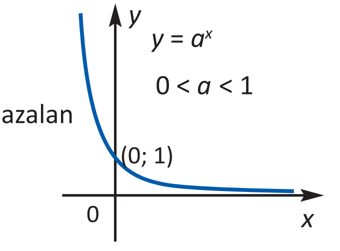
3) $x = 0$ olduqda, $a^0 = 1$ olduğundan üstlü funksiyanın qrafiki y oxunu (0; 1) nöqtəsində kəsir.

4) $a > 1$ olduqda a^x funksiyası artan, $0 < a < 1$ olduqda a^x funksiyası azalandır.

5) Üstlü funksiyanın qrafiki absis oxunu kəsmir və qrafiki x oxundan yuxarı yarımmüstəvidə yerləşir.

6) $0 < a < 1$ olduqda x-in sonsuz böyüməsilə y-in uyğun qiymətləri kiçilir və $y = a^x$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır.
$a > 1$və $x \to -\infty$ olduqda qrafik üzərindəki nöqtələr absis oxuna qeyri-məhdud yaxınlaşır. Absis oxu üstlü funksiyanın üfüqi asimptotudur.



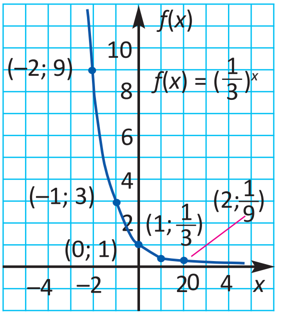


Üstlü funksiya arqumentin dəyişməsilə çox sürətlə artır və ya çox sürətlə azalır.

Nümunə 1. Funksiyanın qrafikinə görə onun düsturunu yazın.

Həlli: Qiymətlər cədvəlini tərtib edək.

x	-2	-1	0	1
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$



Qiymətlər cədvəlindən göründüyü kimi, x-in qiymətləri bir vahid artdıqda, y-in qiymətləri $\frac{1}{3}$-in misilləri ilə azalır.
Deməli, $a = \frac{1}{3}$. Funksiyanın düsturu: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Nümunə 2. Dəyişənin hansı qiymətlərində:

a) $4^x = 64$ bərabərliyi; b) $3^x > 9$; c) $0{,}4^x > 0{,}16$ bərabərsizliyi doğrudur?

Həlli: a) $4^x = 64$ bərabərliyini $4^x = 4^3$ şəklində yazaq. Buradan həqiqi üstlü qüvvətin xassəsinə görə $x = 3$ olur.

b) $3^x > 9$ bərabərsizliyini $3^x > 3^2$ şəklində yazaq. Buradan $x > 2$ olduğu aydındır.

c) $0{,}4^x > 0{,}16$ bərabərsizliyini $0{,}4^x > 0{,}4^2$ (eyni əsasın qüvvətləri şəklində) kimi yazıb, əsas vahiddən kiçik olduğuna görə alırıq: $x < 2$.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Ən azı üç nöqtənin koordinatlarını müəyyən etməklə funksiyaların qrafiklərini qurun.

1) $f(x) = 4^x$ 2) $g(x) = 6^x$ 3) $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 4) $h(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

a) Funksiyanın artan və ya azalan olduğunu göstərin
b) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.
c) Qrafikin y oxunu kəsdiyi nöqtəni müəyyən edin.

2. Artan, yoxsa azalan funksiyadır?
a) $y = 5^x$ b) $y = 0{,}3^x$ c) $y = 5^{-x}$ d) $y = (\sqrt{2} - 1)^x$ e) $y = (\sqrt{5} - 1)^{-x}$

3. Funksiyanın tələb olunan qiymətlərini hesablayın.

a) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $f(1), f(2), f(-1), f(-2)$

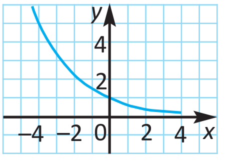
b) $h(x) = (\sqrt{5})^x$ $h(1), h(2), h(-1), h(-2)$

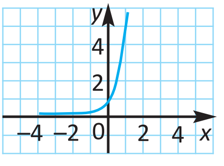
c) $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $g(0), g(2), g(\sqrt{2}), g(-1)$

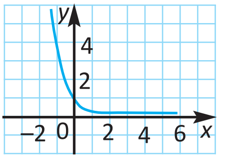
d) $m(x) = 2^{3x-1}$ $m(0), m(2), m(\sqrt{2}), m(-1)$

4. Hansı qrafik hansı funksiyaya aiddir?

1) $y = 5^x$ 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 3) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

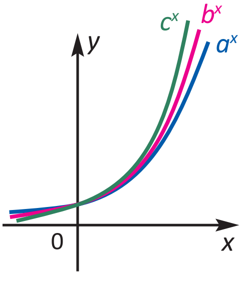
a)


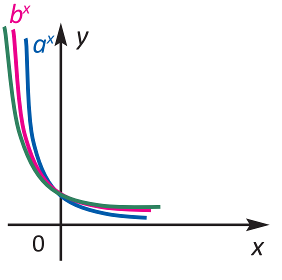
b)


c)


5. $y = 0^x$ və $y = 1^x$ funksiyalarına üstlü funksiya demək olarmı?
Bəs $y = (-1)^x$ funksiyasına necə?

6. $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ funksiyalarının qrafiklərinə görə a, b, c ədədlərini müqayisə edin.

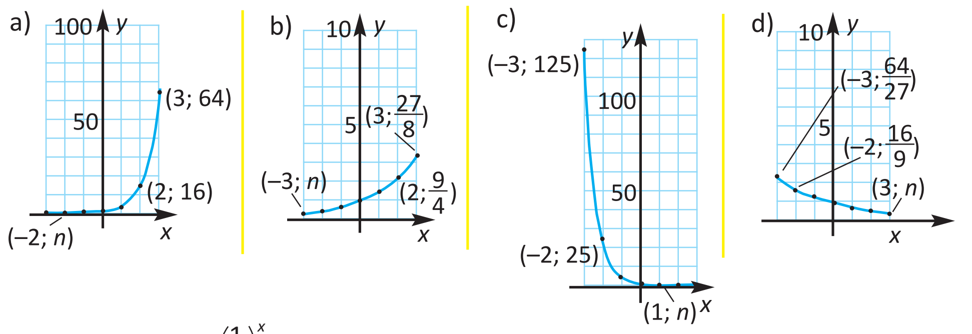
a)


b)


7. Qrafiki verilən nöqtələrdən keçən $y = c \cdot a^x$ üstlü funksiyasının düsturunu yazın.

a) (0; –2) və (–2; –32) b) (0; 3) və (1; 15)
c) (0; 7) və (2; 63) d) (0; –5) və (–3; –135)
e) (0; 0,2) və (4; 51,2) f) (0; –0,3) və (5; –9,6)

8. 1) Verilən qrafiklərə uyğun funksiyanın düsturunu $y = a^x$ şəklində yazın.
2) Qiymətlər cədvəli tərtib edin və qrafiki dəftərinizdə yenidən qurun.



9. $f(x) = 5^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $h(x) = 3^x$ funksiyalarından hansının qiyməti:

a) $x = 5$ olduqda ən böyükdür?

b) $x = -5$ olduqda ən kiçikdir?

c) x-in hansı qiymətində onların hər üçünün qiyməti bərabərdir?

10. $f(x) = 3{,}2^x$, $g(x) = 0{,}3^x$ olarsa, müqayisə edin.

a) $f(5)$ ilə $f(6)$ b) $f(0{,}1)$ ilə $f(0{,}5)$ c) $f(-\sqrt{2})$ ilə $f(\sqrt{2})$

d) $g(5)$ ilə $g(6)$ e) $g(0{,}1)$ ilə $g(0{,}5)$ f) $g(-\sqrt{2})$ ilə $g(\sqrt{2})$

11. Müqayisə edin.

a) $(\sqrt{2})^3$ və $(\sqrt{2})^6$ b) $0{,}1^3$ və $0{,}1^{\sqrt{8}}$ c) $4^{-\sqrt{2}}$ və $4^{-\sqrt{3}}$

12. Dəyişənin hansı qiymətində bərabərlik doğrudur?

a) $3^{x+1} = 27$ b) $4^{x-2} = 64$ c) $(\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2}$

13. Dəyişənin hansı qiymətlərində bərabərsizlik doğrudur?

a) $2^x > 32$ b) $3^x < 27$ c) $0{,}2^x > 0{,}04$ d) $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{8}\right)^x$

14. Tənlikləri qrafik üsulla həll edin.

a) $2^x = 3 - x$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$

15. Qrafik üsulla tənliyin kökünün işarəsini müəyyən edin.

a) $5^x = 6$ b) $0{,}2^x = 3$ c) $4^x = \frac{1}{3}$ d) $0{,}3^x = 0{,}1$.

16. Tənliyi ödəyən iki ədədi şifahi tapın: $2^x = x^2$

Qrafik üsulla tənliyin köklərinin sayını müəyyən edin.

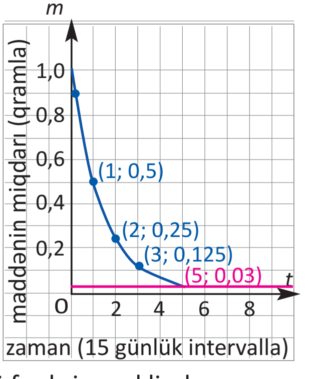
17. $y = 2^x$ və $y = (\frac{1}{2})^x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və qrafiklərinin hansı oxa nəzərən simmetrik olduğunu göstərin. Nəticəni ümumiləşdirin.

Tətbiq tapşırıqları

Mariya Küri. Radioaktiv parçalanma bir və ya bir neçə hissəciklərin (məsələn: elektronlar, neytrino, alfa-hissəciklər, fotonlar) ayrılması ilə müşaiyət olunur. Atomlarının parçalanaraq digər kimyəvi maddəyə çevrilməsi nəticəsində radioaktiv maddə müəyyən müddətdə ilkin miqdarının yarısını itirir. Bu müddət verilmiş radioaktiv maddə üçün sabitdir və yarımparçalanma dövrü (müddəti) adlanır. 1898-ci ildə Mariya Küri yüksək radioaktivliyə malik radium və polonium maddələrini kəşf etdi və bu kəşflərinə görə Nobel mükafatına layiq görüldü. Radium elementinin izotopu olan Radium-226-nın yarımparçalanma müddəti 1620 ildir. Radium-226 yarımparçalanmada Radon-222 maddəsinə – radioaktiv qaza çevrilir.

Radioaktiv maddənin parçalanma qanunu: $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

m_0- maddənin ilkin miqdarı,
T- maddənin yarımparçalanma dövrü,
m- maddənin baxılan t anında miqdarı,
burada t zamandır, mənfi olmayan qiymətlər alır.



Nümunə. Radium (Ra-225) maddəsinin yarımparçalanma müddəti 15 gündür. Parçalanma prosesində onun qalan kütləsinin (qramla) zamandan (15 günlük intervallarla) asılılığını üstlü funksiya ilə modelləşdirmək olar. Bu funksiyanın qrafiki şəkildə verilmişdir.

a) Ra-225 maddəsinin başlanğıc kütləsi neçə qramdır? Qrafik üzərində qeyd edilmiş nöqtələrin koordinatlarını situasiyaya uyğun yazılı izah edin.

b) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

c) Maddənin kütləsinin zamandan asılı dəyişməsini üstlü funksiya şəklində yazın.

d) Ra-225 maddəsinin ilkin kütləsinin onun $\frac{1}{30}$-nə qədər azalmasının hansı zaman müddətində baş verəcəyini təxmin edin.

Həlli: a) Şəkildən göründüyü kimi qrafik, $t = 0$ olduqda y oxunu (0; 1) nöqtəsində kəsir. Yəni radioaktiv maddənin başlanğıc kütləsi $m = 1$ q-dır.

b) Qrafikdən göründüyü kimi, funksiyanın təyin oblastı, yəni t-nin ala bildiyi qiymətlər $t \geq 0$ olan həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın qiymətlər çoxluğu, yəni m-in ala bildiyi qiymətlər $0 < m \leq 1$ olan həqiqi ədədlər çoxluğudur.

c) Radioaktiv maddənin hər 15 gündən bir yarısı parçalanır. Deməli, üstlü funksiyanın əsası $\frac{1}{2}$, üstü isə 15 günlərin sayını göstərən t dəyişəni olacaq.

$m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$

d) Bu məlumatı qrafikə görə də təxmini söyləmək olar. Qiymətlər cədvəli də tərtib etmək olar. İlkin maddə 1 q olduqda onun $\frac{1}{30}$ hissəsi təxminən 0,033 q-dır. y oxu üzərində bu nöqtəni qeyd edək və bu nöqtədən keçərək qrafiki kəsən üfüqi düz xətt çəkək. Düz xətt qrafiki absisi təxminən 5 olan nöqtədə kəsir. Deməli, $5 \cdot 15 = 75$ gündən sonra ilkin radioaktiv maddənin kütləsinin təxminən $\frac{1}{30}$ hissəsi qalacaq.

Öyrənmə tapşırıqları

18. İlkin kütləsi 1 q olan Radium-226 radioaktiv maddəsinin parçalanma qanunu $m(t) = (\frac{1}{2})^{t/1620}$ düsturu ilə verilir. Burada m radiumun kütləsini (qramla), t isə zamanı (illə) göstərir. Verilən maddə kütləsindən nə qədər qalacaq?
a) 1620 ildən sonra; b) 3240 ildən sonra; c) 4860 ildən sonra.

19. Aşağıdakı situasiyalardan hansı eksponensial artan ($a > 1$), hansı ekponensial azalan ($0 < a < 1$) funksiya ilə modelləşdirilə bilər?
a) Petri boşqabındakı bakteriyaların sayı hər saatda 2 dəfə artır.
b) Aktinium-225 izotopunun yarımparçalanma müddəti 10 gündür.
c) Gölə düşən işığın miqdarı hər 1 m dərinlikdə 25% azalır.
d) Böcək dəstəsindəki böcəklərin sayı hər gün 3 dəfə artır.

20. Bank hesabındakı məbləğ illik 2,5% gəlir gətirir. Bu hesabda n ildə yığılan pulun məbləğini $A = P(1+r)^n$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada P ilkin məbləği, r illik artımı (onluq kəsrlə) göstərir. Hesabdakı pulun məbləği $A = P(1{,}025)^n$ kimi dəyişəcək.
a) Hesabdakı ilkin məbləği bir manat qəbul etməklə uyğun üstlü funksiyanın qrafikini qurun.
b) Qrafikə görə bu məbləğin neçə ildən sonra ilkin məbləğin üçqatı olacağını təxmin edin. Hesabdakı məbləğin üçqat artması müddəti ilkin məbləğin miqdarından asılıdırmı?
c) Maliyyədə mürəkkəb faiz artımına görə ilkin məbləğin ikiqat artma müddətini "72 üsulu" ilə hesablayırlar. Məsələn, 100 manat pulun neçə ilə 200 manat olacağını tapmaq üçün illərin sayının artım faizinə hasili 72-yə bərabər olmalıdır, yəni $n \cdot r = 72$ olmalıdır.

Bu qaydaya və qrafikə görə bir manat pulun 2,5%-lə neçə ildən sonra təxminən 2 manat olacağını tapın və nəticələri müqayisə edin.

21. $y = 3x$, $y = x^3$, və $y = 3^x$ funksiyalarının qrafikini qurun.
Hər bir funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu, sıfırlarını (əgər varsa) yazın. $x = 1; 2; 3; 4$ qiymətlərində bu funksiyaların qiymətlərini müqayisə edin. Hansı funksiyanın qiymətləri daha sürətlə dəyişir?

22. Ən azı üç nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən etməklə funksiyaların qrafikini qurun.

a) $y = 2 \cdot 3^x$ b) $y = 5 \cdot 2^x$ c) $y = 0{,}5 \cdot 4^x$ e) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

23 g(x) funksiyasının qrafiki f(x) funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə alınar?

a) $f(x) = 4^x$ və $g(x) = 4^x + 1$ b) $f(x) = -2^x$ və $g(x) = 5 - 2^x$

24. $y = 4^x$, $y = 4^{x+2}$, $y = 4^{x-3}$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu funksiyaların təyin oblastları və qiymətlər çoxluğu, asimptotları haqqında fikirlərinizi söyləyin.

25. $y = 10^x$ funksiyasını $y = (2 \cdot 5)^x$ kimi yazmaq olar. Bu funksiyanın və $y = 2 \cdot 5^x$ funksiyasının qrafikini qurun və onları müqayisə edin.

26. Verilən funksiyaları $y = l \cdot a^x$ şəklində yazın.

a) $y = 4^{x+1}$ b) $y = 5 \cdot \sqrt{9^{x-1}}$

27 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiyasının qrafiki şaquli istiqamətdə elə sürüşdürülmüşdür ki, alınan qrafik (1; –2) nöqtəsindən keçir.

a) Sürüşdürülmüş qrafikə uyğun funksiyanın düsturunu yazın.

b) Qrafikləri təsvir edin.

28. a) Cədvələ $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ funksiyasının qiymətləri sütununu əlavə etməklə qrafikini qurun.

b) $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ funksiyasının qrafiki $y = 3^x$ funksiyasının qarfikindən hansı çevriləmələrlə alındığını yazın.

c) $y = 3^x$ və $y = -2 \cdot 3^{x-4} - 3$ funksiyalarının hər birinin təyin oblastnı və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

$y = 3^x$	$y = 2 \cdot 3^x$	$y = 2 \cdot 3^{x-4}$
$(-1; \frac{1}{3})$	$(-1; \frac{2}{3})$	$(3; \frac{2}{3})$
(0; 1)	(0; 2)	(4; 2)
(1; 3)	(1; 6)	(5; 6)
(2; 9)	(2; 18)	(6; 18)
(3; 27)	(3; 54)	(7; 54)

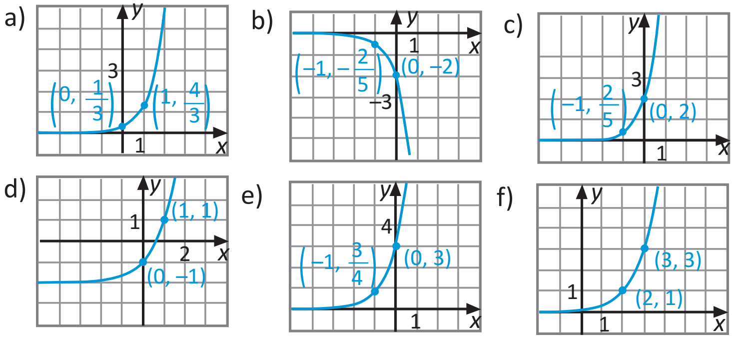
29. Verilən funksiyaların qrafiklərini $f(x) = l \cdot a^x$ üstlü funksiyasının qrafikinin paralel köçürülməsi ilə qurun. Hər bir funksiya üçün paralel köçürmə vektorunu yazın.

a) $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ b) $y = \frac{1}{3} \cdot 3^{x+2}$ c) $y = 2 \cdot 2^{x-2}$

d) $y = -3 \cdot 3^{x+2} - 2$ e) $y = 4 \cdot 2^{x-3} + 1$ f) $y = 4 \cdot 2^{x-3} - 4$

30. Hansı qrafikin hansı funksiyaya aid olduğunu müəyyən edin.

1) $y = 2 \cdot 5^x$
2) $y = 3 \cdot 4^x$
3) $y = -2 \cdot 5^x$
4) $y = \frac{1}{3} \cdot 4^x$
5) $y = 3^{x-2}$
6) $y = 3^x - 2$



31. Funksiyanın artan və ya azalan olduğunu müəyyən edin.

a) $y = 10 \cdot 3{,}5^x$ b) $y = 2 \cdot 4^x$ c) $y = 0{,}4 \cdot (\frac{1}{3})^x$

d) $y = 3 \cdot (\frac{5}{2})^x$ e) $y = 30^{-x}$ f) $y = 0{,}2 \cdot 5^{-x}$

32. Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.

a) $y = 3^x + 2$ b) $y = 2^x - 3$ c) $y = 2^{x^2+1}$

d) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$ e) $y = 3 \cdot 3^{x-1} + 3$ f) $y = 2^{|x|-1}$

33. Real həyati situasiyalarda hər hansı kəmiyyət illik olaraq sabit faizlə artarsa, t ildən sonrakı vəziyyəti kəmiyyətcə qiymətləndirmək üçün $y = a(1 + r)^t$ düsturundan, azalma baş verirsə, $y = a(1 - r)^t$ düsturundan istifadə edilir. Burada a -ilkin miqdarı, r -artım (azalma) faizini onluq kəsrlə, t -illərin sayını göstərir. Bu düstura görə məsələləri həll edin.

Nümunə. 24 000 manata alınmış avtomobilin qiyməti hər il 12% aşağı düşür. Avtomobilin qiymətinin istifadə ilindən (t) asılılığını göstərən üstlü funksiyanın düsturunu yazın.
Həlli: $y = a(1 - r)^t$ düsturunda $a = 24000$, $r = 12\% = 0{,}12$, $1 - r = 0{,}88$ olduğunu nəzərə alsaq, verilən situasiyanı $y = 24000 \cdot (0{,}88)^t$ üstlü funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

a) 1993-cü ildə internet istifadəçilərinin sayı 1 313 000 nəfər olmuş və on il ərzində onların sayı hər il 100% artmışdır. İnternet istifadəçilərinin t ildən sonra sayını göstərən üstlü funksiyanı yazın. 5 ildən sonra istifadəçilərin sayı neçə nəfər olub? 2000-ci ildə istifadəçilərin sayı neçə nəfər olmuşdur?

b) Bank hesabına illik 8% mürəkkəb faiz artımı ilə qoyulmuş 1000 manat pul 6 ildən sonra neçə manat olacaq?

c) Təsəvvür edin ki, siz tərkibində 120 milliqram kofein olan qəhvə içmisiniz. Qəbul edilmiş kofenin miqdarı saatda 12% olmaqla azalır. Orqanizmdə t saat sonra qalan kofenin miqdarını göstərən üstlü funksiyanın düsturunu yazın.

Araşdırma. **e ədədi.**
Təsəvvür edin ki, 1 manat pul illik 100% mürəkkəb faiz artımı ilə bir illiyinə banka qoyulmuşdur və il ərzində n dəfə hesablama aparılır. Mürəkkəb faiz artımı düsturunda $S_0 = 1$, $r = 100\% = 1$, $t = 1$ qiymətlərini yerinə yazın.

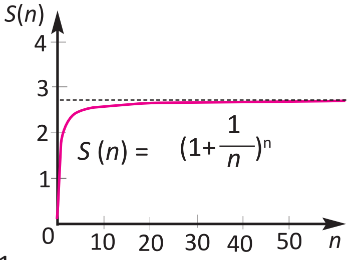
$$S = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot 1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

n-nin müxtəlif qiymətlərində funksiyanın qiymətlərini hesablamaqla $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadəsinin qiymətinin hansı ədədə yaxınlaşdığını araşdırın.

Hesablama şərti	n	$S(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	Məbləğ (₼)
İllik	1	$S(n) = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2
Yarımillik	2	$S(n) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2,25
Kvartallıq	4	$S(n) = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	2,4414
Aylıq	12	$S(n) = \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	2,4883
Gündəlik	365	$S(n) = \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	2,7048
Saatlıq	8760	$S(n) = \left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	2,7146
			2,7181

Göründüyü kimi, bank verilən faizlə pulu daha tez-tez hesablayarsa, gəlir artar. Lakin bankın faizi gündəlik hesablamasından aylıq hesablamasına nisbətən əldə edilən gəlir cəmi 10 qəpikdir. Təsəvvür edin ki, bank hesabdakı pula verilən faizə görə ara vermədən hər saniyə gəlir hesablayır. Yenə də fərq saatlıq və ya gündəlik hesablamadakından çox fərqlənməyəcək.

$S(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ funksiyasının qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikindən görünür ki, $n \to \infty$ olduqda $S(n)$ funksiyasının qiymətləri müəyyən bir ədədə yaxınlaşır.



e ədədi

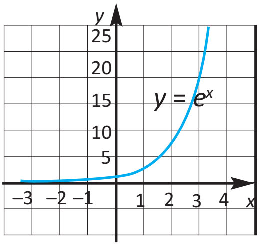
Araşdırmalar göstərir ki, n-in qiyməti artırdıqca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadəsinin qiyməti müəyyən bir ədədə yaxınlaşır. Bu ədəd e hərfi ilə işarə edilir və qiyməti $e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459...$ kimidir. e ədədi də π ədədi kimi irrasional ədəddir. Bu ədədlər **transendent ədədlərdir**. Transendent ədədlər əmsalları tam ədədlər olan heç bir n dərəcəli çoxhədlinin kökləri olmayan ədədlərdir.

Ekponensial artma və ya azalmanı e əsasına görə $N = N_0e^{kt}$ düsturu ilə ifadə etmək olar. N_0 - ilkin miqdarı, t -zamanı göstərir. k -sabit ədəddir.

$y = e^x$ funksiyasının qrafiki

$y = e^x$ funksiyasının qrafikini qurmaq üçün müxtəlif qrafkalkulyatorlardan (www.geogebra.org) istifadə etmək olar.

$y = e^x$ funksiyasına eksponenta da deyilir.



Öyrənmə tapşırıqları

34. e^x düyməsi olan kalkulyatorlardan istifadə edin.
İfadələrin qiymətini hesablayın.

a) e^{-2} b) $e^{-0,23}$ c) e^0

35. Qrafkalkulyatorun köməyilə $y = e^x$ funksiyasının qrafikini qurun. Aşağıdakı funksiyaların qrafikini $y = e^x$ funksiyasının qrafikinin çevrilmələrinə görə sxematik təsvir edin.

a) $y = 2 \cdot e^{2x}$ b) $y = e^{-x}$ c) $y = 3e^{-x}$

36. DDT ($C_{14}H_9Cl_5$) maddəsini ilk dəfə isveçrə alimi Paul Müller kəşf etmiş və bu kəşfinə görə Nobel mükafatına layiq görülmüşdür. Müharibədən sonrakı dövrdə DDT pestisidi ilə ətrafın dərmanlanması nəticəsində tif və malyariya kimi xəstəlikləri yayan həşəratlar məhv edildi. Lakin araşdırmalar bu maddənin insan orqanizminə də ziyanı olduğunu göstərir. Tutaq ki, 1973-cü ildə 1×10^9 kq DDT müəyyən sahənin dezinfeksiyası üçün istifadə edilmişdir. $k = -0,023$ olarsa:
a) Verilən ildə bu maddənin qalığını göstərən düsturu $N = N_0 e^{kt}$ şəklində yazın.
b) 2020-cı ildə bu maddədən nə qədər qalar? Kalkulyatorla hesablayın.

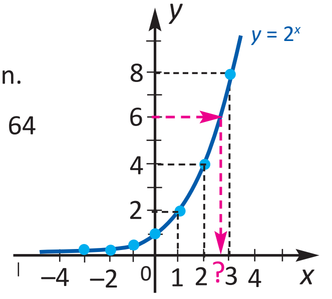
37. Təcrübə zamanı t saat müddətdən sonra qabdakı bakteriyaların N sayını $N = 100\, e^{0,69t}$ düsturu ilə müəyyən etməyin mümkün olduğu aşkar edilmişdir.
a) Qabdakı bakteriyaların ilkin sayını tapın.
b) 5 saat sonra qabda neçə bakteriya olacaq?

38. 5000 manat pul 25 illiyinə 12% illik mürəkkəb faiz artımı ilə banka qoyulmuşdur. Gəlirin hesablanması kəsilməz olaraq aparıldıqda əldə olunan gəliri $S = S_0 e^{rt}$ düsturu ilə, ildə iki dəfə ($n = 2$) faiz hesablanmaqla əldə olunan gəliri $S = S_0(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ düsturu ilə hesablayın. Hansı halda çox gəlir və nə qədər çox gəlir əldə edilər?

Araşdırma

1) x-in yerinə elə ədədlər yazın ki, bərabərlik doğru olsun.

a) $2^x = 16$ b) $3^x = 9$ c) $4^x = 64$



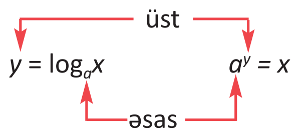
2) Arqumentin hansı qiymətində $y = 2^x$ funksiyası 6-ya bərabər qiymət alır?
x-in bu qiyməti yeganədirmi?

3) x-in verilmiş bərabərliyi ödəyən qiyməti hansı iki ardıcıl tam ədədin arasındadır?

a) $2^x = 24$ b) $3^x = 18$ c) $4^x = 56$

Loqarifma

b ədədini almaq üçün a ədədinin yüksəldildiyi qüvvət üstünə b ədədinin a əsasdan loqarifmi deyilir və $y = \log_a b$ kimi yazılır.
Burada $a \neq 1$ olmaqla a və b müsbət həqiqi ədədlərdir.
$y = \log_a x$ yazılışı $a^y = x$ bərabərliyinin loqarifmik yazılışıdır və ya əksinə $a^y = x$ yazılışı $y = \log_a x$ bərabərliyinin üstlü yazılışıdır.



Yəni $a^y = x$ və $y = \log_a x$ yazılışları ekvivalent yazılışlardır.

- $\log_a 1 = 0$, çünki $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, çünki $a^1 = a$.
- $\log_a a^y = y$, çünki $a^y = a^y$
- $a^{\log_a x} = x$, çünki $\log_a x = \log_a x$

$\boldsymbol{a^{\log_a x} = x}$ bərabərliyinə əsas loqarifmik eynilik deyilir. Burada $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$

Nümunə 1. Loqarifmik yazılışları üstlü yazılışlarla əvəz edin.

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$ c) $\log_8 1 = 0$

Həlli:

Loqarifmik yazılış:	Üstlü yazılış:
a) $\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
b) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = -3$	$10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$
c) $\log_8 1 = 0$	$8^0 = 1$

Nümunə 2. Loqarfmik ifadələrin qiymətini tapın.

a) $\log_3 27$ b) $\log_a a$ c) $\log_5 \sqrt[4]{5}$

Həlli:

a) $\log_3 27 = x$ *işarə edək*

$3^x = 27$ *üstlü yazılış*

$3^x = 3^3$, $x = 3$ *qüvvətin xassəsinə görə*

b) $\log_a a = x$

$a^x = a$

$x = 1$

c) $\log_5 \sqrt[4]{5} = x$

$5^x = \sqrt[4]{5}$

$x = \dfrac{1}{4}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Bərabərlikləri ekvivalent loqarifmik yazılışla əvəz edin.

a) $3^4 = 81$ b) $8^{1/3} = 2$ c) $0{,}5^{-2} = 4$ d) $b^y = x$

e) $e^x = y$ f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ g) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$ h) $8^{-2} = \frac{1}{64}$

2. Bərabərlikləri ekvivalent üstlü yazılışla əvəz edin.

a) $\log_5 625 = 4$ b) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$ c) $\lg(0{,}0001) = -4$ d) $\log_{25}\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2}$

e) $\log_b 15 = x$ g) $\log_b 82 = y$ h) $\log_3 5 = x$ i) $\log_2 7 = x$

Əsası 10 və e ədədi olan loqarifmalar uyğun olaraq lg və ln kimi işarələnir. Əsası 10 olan loqarifma onluq loqarifma, əsası e olan isə natural loqarifma adlanır.

$\log_{10} 0{,}001 \Rightarrow \lg 0{,}001$ $\log_e c \Rightarrow \ln c$

Loqarifmi hesablamaq üçün kalkulyatorlardan istifadə etmək olar.

3. Hesablayın.

a) $\lg 0{,}001$ b) $\lg(6{,}3 \cdot 10^5)$ c) $\lg 0{,}00025$ d) $\ln(e^3)$ e) $\ln 8$

4. Kalkuyatordan istifadə etmədən loqarifmik ifadələrin qiymətlərini tapın.

a) $\log_7 49$ b) $\log_3 27$ c) $\lg 0{,}1$ d) $\log_2 \frac{1}{16}$

e) $\log_{16} 4$ f) $\log_8 2$ g) $\log_{\frac{7}{2}} 1$ h) $\log_{0{,}5} 2$

i) $\log_3 3^5$ j) $\log_9 9^3$ k) $\lg 10$ l) $\log_7 1$

5. 1) Nümunələr üzərində loqarifmin əsasının sıfır, bir və ya mənfi ədəd ola bilmədiyini izah edin.

2) İfadənin mənası varmı?

a) $\log_{-3} 9$ b) $\lg(-10)$ c) $\log_1 3$ d) $\ln 7$ e) $\log_3 16$

6. a və b-nin yerinə elə ardıcıl tam ədədlər yazın ki, bərabərsizlik doğru olsun.

a) $a < \log_2 48 < b$ b) $a < \log_3 100 < b$ c) $a < \log_5 90 < b$

7. Əsas loqarifmik eyniliyin köməyilə ifadələrin qiymətini hesablayın.

a) $2^{\log_2 8}$ b) $10^{\lg 2}$ c) $3^{1+\log_3 2}$ d) $10^{2-\lg 4}$

e) $2^{3\log_2 5}$ f) $5^{2\log_5 3}$ g) $4^{\log_2 3}$ h) $16^{\log_4 7}$

8. Hesablayın.

a) $(1 + 3^{\log_3 5})^{\log_6 2}$ b) $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 3}$ c) $(7 - 5^{\log_5 3})^{1+\log_2 3}$

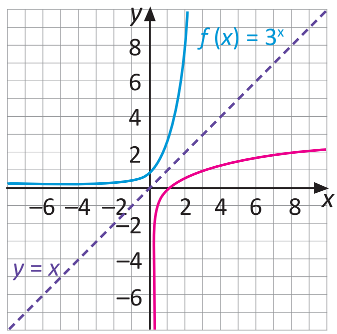
9. Bərabərlikdən məchulu tapın.

a) $\log_2 x = -1$ b) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ c) $\log_x 25 = 2$ d) $\log_x \frac{1}{4} = -2$

Araşdırma. $f(x) = 3^x$ və onun tərsi olan $f^{-1}(x)$ funksiyalarının qiymətlər cədvəlini və qrafiklərini dəftərinizdə siz də qurun. Funksiya və tərs funksiya haqqında fikirlərinizi yazın.

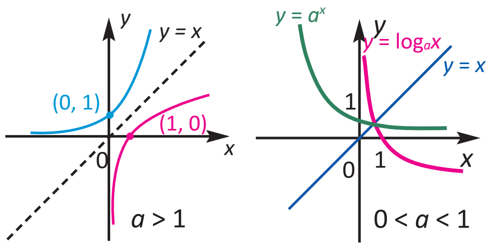
$f(x) = 3^x$	
x	y
–3	$\frac{1}{27}$
–2	$\frac{1}{9}$
–1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

$f^{-1}(x)$	
x	y
$\frac{1}{27}$	–3
$\frac{1}{9}$	–2
$\frac{1}{3}$	–1
1	0
3	1
9	2
27	3



Loqarifmik funksiya

$y = a^x$ funksiyası özünün hər bir qiymətini arqumentin yalnız bir qiymətində alır. Yəni, $y = a^x$ funksiyasının tərsi olan funksiya var və bu funksiya $x = \log_a y$ funksiyasıdır.



Deməli, $y = a^x$ funksiyasının qrafikini $y = x$ düz xəttinə nəzərən simmetrik çevirsək, $y = \log_a x$ funksiyasının qrafikini alarıq.

1) Loqarifmik funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət ədədlər çoxluğudur:

$$D(\log_a x) = (0; +\infty)$$

2) Loqarifmik funksiyanın qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur:

$$E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$$

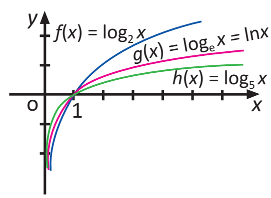
3) Loqarifmik funksiya $a > 1$ olduqda artan, $0 < a < 1$ olduqda azalandır.

4) $y = \log_a x$ funksiyasının qrafiki absis oxunu (1; 0) nöqtəsində kəsir.

$a > 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log_5 x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.

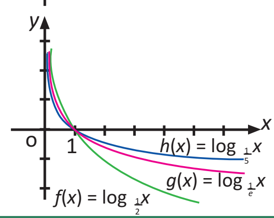
Qrafikləri dəftərinizdə qurun.

$a > 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya mənfi, $x > 1$ olarsa, müsbət qiymətlər alır.



$0 < a < 1$ olduqda nümunə olaraq $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{e}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir.

$0 < a < 1$ olduqda $0 < x < 1$ olarsa, loqarifmik funksiya müsbət, $x > 1$ olarsa, mənfi qiymətlər alır.



Öyrənmə tapşırıqları

1. a-nın verilən qiymətlərində $y = a^x$ və $y = \log_a x$ funksiyasının qrafiklərini eyni koordinat sistemində qurun.

a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 4$ d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a = \frac{1}{3}$

2. $y = \log_2 x$ funksiyasının qrafikindən hansı simmetrik çevrilmə ilə $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funksiyasının qrafikini almaq olar? Qrafikləri eyni koordinat sistemində qurun.

3. Verilmiş funksiyanın tərs funksiyasının düsturunu yazın. Verilmiş funksiyanın və tərs funksiyanın qrafiklərini qurun. Tərs funksiya üçün müəyyən edin:

- təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu;
- asimptotunun tənliyini.
- qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini;

a) $y = 5^x$ b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

4. $y = \log_3 (x + 9) + 2$ funksiyasının qrafiki $\log_3 x$ funksiyasının qrafikinin $\langle -9;\ 2\rangle$ vektoru üzrə icra edilən paralel köçürülməsi ilə alınır. Verilən funksiyaların qrafikini hansı funksiyanın qrafikini və necə sürüşdürməklə almaq olar?

a) $y = \log_2 x + 3$ b) $y = \log_2(x + 3)$ c) $y = \log_3(x - 3) - 4$

5. Artan, yoxsa azalan funksiyadır? a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

6. Müqayisə edin:

a) $\log_2 5$ və $\log_2 7$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ və $\log_{\frac{1}{2}} 3$ c) $\log_2 3$ və $\log_5 4$

7. $(\frac{1}{8};\ -3)$ nöqtəsi $f(x) = \log_a x$ funksiyasının, $(4;\ k)$ nöqtəsi isə $f^{-1}(x)$ tərs funksiyasının qrafiki üzərindədir. k-nın qiymətini tapın.

8. Ədədin işarəsini müəyyən edin:

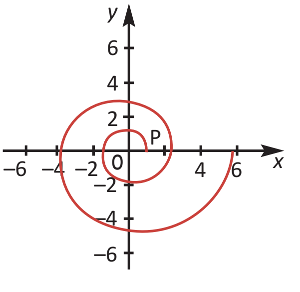
a) $\log_5 2$; b) $\log_{0,2}\sqrt{3}$; c) $\log_3 0,2$; d) $\log_{0,4}0,6$

9. Loqarifmik spiral başlanğıcı P(1; 0) nöqtəsində olmaqla P nöqtəsinin saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətdə φ bucağı qədər(radianla) dönməsi ilə alınır. Bu zaman P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından r məsafəsi $r = e^{0,14\varphi}$ düsturu ilə müəyyən edilir.

a) 2π dönmədə P nöqtəsinin koordinat başlanğıcından məsafəsini tapın. Cavabınızı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

b) r və φ arasındakı asılılığı loqarifmik yazılışla ifadə edin.

c) $r = 12$ olduqda φ-nın qiymətini tapın.



Araşdırma. 1) lg (1000 · 100) ≠ (lg 1000)·(lg 100) olduğunu göstərin.
2) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

a) $\log_2 4 + \log_2 8$ və $\log_2 32$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} + \log_{\frac{1}{2}} 8$ və $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Fikirlərinizi $\log_a b + \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. a, b, c müsbət həqiqi ədədlərdir və $a \neq 1$.

3) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

b) $\log_3 27 - \log_3 9$ və $\log_3 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ və $\log_{\frac{1}{2}} 16$

Fikirlərinizi $\log_a b - \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. a, b, c müsbət həqiqi ədədlərdir və $a \neq 1$.

4) Hesablayın. Nəticələri müqayisə edin.

a) $3 \cdot \log_2 4$ və $\log_2 64$

b) $2 \cdot \log_3 \frac{1}{9}$ və $\log_3 \frac{1}{81}$

Fikirlərinizi $b \cdot \log_a c$ üçün qayda ifadə etməklə ümumiləşdirin. a, c müsbət həqiqi ədədlərdir və $a \neq 1$.

5) Qüvvətin xassələrini dəftərinizdə sözlə ifadə edin.
Hər birini iki nümunə yazmaqla izah edin.

- qüvvətlərin hasili: $c^x \cdot c^y = c^{x+y}$
- qüvvətlərin nisbəti: $\frac{c^x}{c^y} = c^{x-y}$, $c \neq 0$
- qüvvətin qüvvəti: $(c^x)^y = c^{xy}$

Loqarifmin xassələri

1. Hasilin loqarifmi: $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$
İki müsbət ədədin hasilinin loqarifmi vuruqların loqarifmləri cəminə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

2. Nisbətin loqarifmi: $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$
İki müsbət ədədin nisbətinin loqarifmi onların loqarifmləri fərqinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x və y müsbət həqiqi ədədlərdir.

3. Qüvvətin loqarifmi: $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$
Ədədin qüvvətinin loqarifmi qüvvət üstü ilə həmin ədədin loqarifmi hasilinə bərabərdir. Burada $c \neq 1$ və $c > 0$ olmaqla x müsbət həqiqi ədəddir.

Xassə 1. $\log_c xy = \log_c x + \log_c y$ $(c \neq 1,\ c > 0,\ x > 0,\ y > 0)$

1-ci xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ və $\log_c y = n$, kimi işarə edək.

$x = c^m$ və $y = c^n$	*eksponensial yazılışla*
$xy = (c^m)\cdot(c^n)$	*x və y ədədlərinin hasili*
$xy = c^{m+n}$	*qüvvətlərin hasilinin xassəsi*
$\log_c xy = m + n$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c xy = \log_c x + \log_c y$	*m və n-in qiymətləri nəzərə alınmaqla*

Xassə 2. $\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$ $(c \neq 1,\ c > 0,\ x > 0,\ y > 0)$

2-ci xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ və $\log_c y = n$ kimi işarə edək.

$x = c^m$ və $y = c^n$	*eksponensial yazılışla*
$\frac{x}{y} = \frac{c^m}{c^n}$	*x və y ədədlərinin nisbəti*
$\frac{x}{y} = c^{m-n}$	*qüvvətlərin nisbətinin xassəsi*
$\log_c \frac{x}{y} = m - n$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c \frac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$	*m və n-in qiymətləri nəzərə alınmaqla*

Xassə 3. $\log_c x^y = y \cdot \log_c x$ $(c \neq 1,\ c > 0,\ x > 0)$

3-cü xassənin isbatı:

$\log_c x = m$ kimi işarə edək.

$x = c^m$	*eksponensial yazılışla*
$x^y = (c^m)^y$	*bərabərliyin xassəsi*
$x^y = c^{my}$	*qüvvətin qüvvəti*
$\log_c x^y = m\,y$	*loqarifmik yazılışla*
$\log_c x^y = (\log_c x)\cdot y$	*m-in qiyməti nəzərə alınmaqla*
$\log_c x^y = y \cdot \log_c x$	*vurmanın yerdəyişmə qanunu*

Öyrənmə tapşırıqları

1. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələrin qiymətini hesablayın.

a) $\log_2 (64\cdot 32)$ b) $\log_3 \frac{0,(3)}{81}$ c) $\log_5 (125\cdot 625)$

d) $\log_6 3 + \log_6 12$ e) $\lg 2 + \lg 5$ f) $\log_{0,5} 6,4 + \log_{0,5} 10$

g) $\log_2 48 - \log_2 3$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 18 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ i) $\lg 0,25 - \lg 25$

j) $\log_2 \sqrt[4]{8}$ k) $\log_3 (9 \cdot 27)$ l) $\lg \sqrt{10^3}$ m) $\log_{0,5} \sqrt[4]{8}$

n) $\dfrac{\log_5 8}{\log_5 32}$ o) $\dfrac{\log_3 125}{\log_3 25}$ p) $\dfrac{\log_7 6}{\log_7 2 + \log_7 18}$ r) $\dfrac{\lg 2 + \lg 5}{\lg 13 - \lg 130}$

2. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadəni *x*, *y*, *z* müsbət ədədlərinin loqarifmləri ilə yazın.

Nümunə 1. $\log_4 xy\sqrt{z} = \log_4 x + \log_4 y + \log_4 (z)^{\frac{1}{2}} = \log_4 x + \log_4 y + \dfrac{1}{2} \log_4 z$

a) $\log_6 \dfrac{x}{y}$ b) $\log_5 \sqrt{xy}$ c) $\log_3 \dfrac{9}{\sqrt{x^2}}$ d) $\log_7 \dfrac{x^5 y}{\sqrt{z}}$

3. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələri müəyyən ədədin loqarifmi ($\log_a N$) şəklində yazın.

Nümunə 2. $\log_5 6 + \log_5 10 - \log_5 2 = \log_5 \dfrac{6 \cdot 10}{2} = \log_5 30$

a) $\log_2 3 + \log_2 5$ b) $\log_3 16 - \log_3 2$ c) $3 \cdot \log_5 4$
d) $2 \lg 3 - 3 \lg 2$ e) $\lg 216 - \lg 36$ f) $\lg 16 + \lg 4$
g) $5 \log_3 2 + 2 \log_3 5$ h) $\lg 12 - 2 \lg 2 + \lg 3$ i) $3 \log_2 3 + 2 \log_2 5 - \log_2 6$

4. Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığını bilərək, ifadəni loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə müəyyən ifadənin loqarifmi şəklində yazın.

Nümunə 3. $5 + \log_2 x = \log_2 2^5 + \log_2 x = \log_2 32 + \log_2 x = \log_2 32x$

a) $\log_x x + \log_x 10$ b) $\log_2 a + \log_2 b$

c) $\log_2 x - 5 \log_2 y$ d) $\dfrac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 y$

e) $\dfrac{1}{2} \lg x + 3 \lg y$ f) $\dfrac{2}{3} \log_5 x + 4 \log_5 y - 3 \log_5 z$

g) $\ln x + 2 \ln y - 2 \ln z$ h) $\log_7 x^2 + \log_7 x - 5 \log_7 x$

5. Dəyişənlərin mümkün qiymətlərində sadələşdirin.

a) $\log_2(x^2 - 9) - \log_2(2x - 6)$ b) $\log_5(x - 1) - \log_5(x^2 + 2x - 3)$

6. $\log_5 2 = a$ və $\log_5 3 = b$ olduğunu bilərək *a* və *b* ilə ifadə edin:

a) $\log_5 6$; b) $\log_5 12$; c) $\log_5 15$; d) $\log_5 30$.

7. $\lg a = 3$, $\lg b = 12$, $\lg c = 8$ olarsa, $\lg \dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{c}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

8. 1) Tapın:

a) $k = \log_2 40 - \log_2 5$ olduqda 3^k ifadəsinin qiymətini;
b) $n = 3\log_8 4$ olduqda 7^n ifadəsinin qiymətini.

2) Sadələşdirin: a) $e^{\ln 10x^3 - \ln 2x}$ b) $3^{2\log_3 x - \log_3 2x}$

9. $\lg 5 \approx 0{,}699$ və $\lg 15 \approx 1{,}176$ olduğunu nəzərə alaraq ifadələrin qiymətini hesablayın.

a) $\lg 3$ b) $\lg 75$ c) $\lg 12$ d) $\lg 45$

Bir əsasdan başqa əsasa keçmə

Əsas loqarifmik eyniliyə və qüvvətin loqarifminin xassəsinə görə:

$$\log_c b = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log_c a \quad (a \neq 1,\ c \neq 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$$

Buradan: $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ Xüsusi halda, $c = b$ olarsa, $\boldsymbol{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Bir çox kalkulyatorlarda yalnız onluq (lg) və natural loqarifmləri (ln) hesablamaq üçün klaviş mövcuddur. Bu səbəbdən də loqarifmləri daha çox onluq və natural loqarifma şəklində yazmaq zərurəti yaranır.

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} \qquad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Nümunə 1. a) onluq loqarifma; b) natural loqarifma ilə yazın və hesablayın.

$$\log_3 7 = \frac{\lg 7}{\lg 3} \approx \frac{0{,}845}{0{,}477} \approx 1{,}771 \qquad \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1{,}946}{1{,}099} \approx 1{,}771$$

10. Onluq və ya natural loqarifmə gətirməklə hesablayın.

$\log_5 7$ $\log_7 12$ $\log_3 16$ $\log_9 25$ $\log_6 24$
$\log_2 5$ $\log_5 9$ $\log_3 17$ $\log_5 32$ $\log_4 19$

11. 1) Bir əsasdan başqa əsasa keçmə düsturunun köməyi ilə göstərin ki:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$$

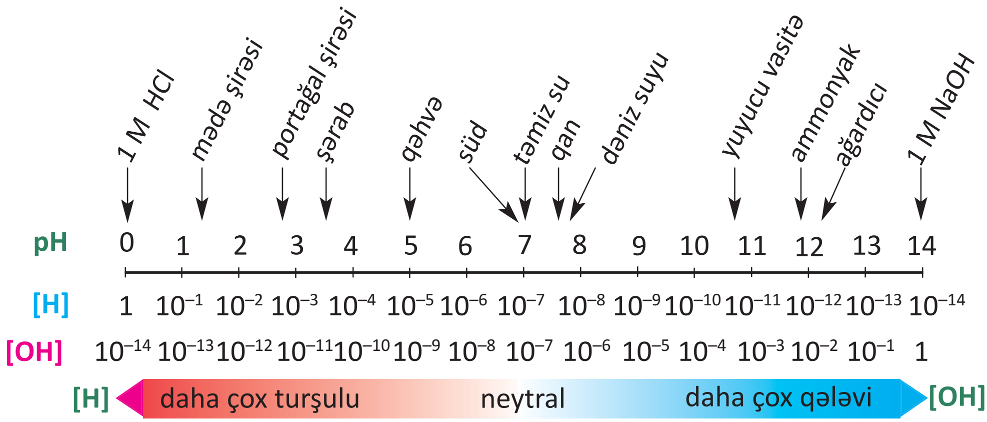
2) Hesablayın.

a) $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4}$ b) $\log_{\sqrt{3}} 9^{-1}$ c) $\log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$ d) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$

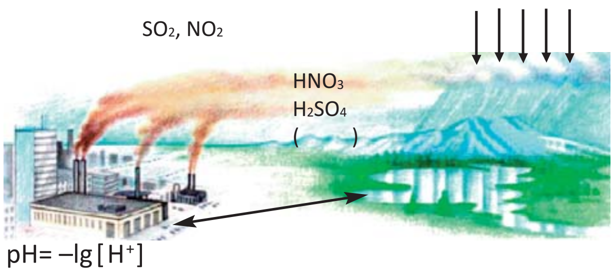
e) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4$ f) $\log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8$

g) $\dfrac{1}{\log_{12} 6} + \dfrac{1}{\log_3 6}$ h) $\dfrac{1}{\log_{36} 3} - \dfrac{2}{\log_{54} 3}$

1. Kimya - Ekologiya. pH (hidrogen ionlarının aktivliyi) məhlullarda hidrogen ionlarının konsentrasiyasını səciyyələndirən kəmiyyətdir. Məhlulun pH-nı hesablamaq üçün $pH = -\lg[H^+]$ düsturundan istifadə edilir.
Burada H^+ məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını *mol/l* ilə göstərir. Bu düstura görə məhlulda pH göstəricisi 1 vahid artırsa, deməli, məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyası 10 dəfə artmışdır.
pH şkalasında pH-ın qiyməti 0-dan 14-ə qədər dəyişir. pH-ın 7-yə bərabər olan qiymətində məhlul neytral hesab edilir. 7-dən kiçik qiymətlərdə məhlulun turşululuğu, 7-dən böyük qiymətlərdə qələviliyi çoxdur.



a) Normal yağış suyunda pH 5,6-ya bərabər olur. Lakin ekoloji cəhətdən çirklənmiş bir çox yerlərdə turşululuğu çox olan yağışlar yağır. Yağış suyunda hidrogen ionlarının konsentrasiyası 0,0002 *mol/l* olarsa, onun pH göstəricisini hesablayın.



b) pH göstəricisi 5,6 olan suyun $[H^+]$ konsentrasiyasını müəyyən edin.

2. Fizika. Səs dalğaları. Səsin gurluğu desibellə ölçülür və $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ düsturu ilə hesablanır. Burada I səsin intensivliyi (vatt/m^2), I_0 insan qulağının eşidə bildiyi ən aşağı səs intensivliyidir (10^{-12}vat/m^2 qəbul edilir). İnsan qulağı çox geniş diapazonda səsləri eşidə bilir. Bu 0 dB-dən (səssizlik) 180 dB arasında dəyişir.
a) Radiodakı musiqi səsinin intensivliyi insan qulağının eşidə biləcəyi minimum səsin intensivliyindən 4000 dəfə çoxdur. Musiqi səsinin gurluğu neçə desibeldir?
b) Tahir deyir ki, intensivliyi $4\cdot10^{-8}$ vatt/m^2 olan səs intensivliyi $2\cdot10^{-8}$ vatt/m^2 olan səsdən 2 dəfə gurdur. Siz necə düşünürsünüz?

3. Zəlzələ. 1935-ci ildə Amerika seysmoloqu Çarlz Rixter zəlzələnin gücünü hesablamaq üçün $M = \lg\frac{A}{A_0}$ düsturunu müəyyən etdi və zəlzələnin gücünü göstərən (Rixter şkalası adlanan) loqarifmik şkala yaratdı.

M - zəlzələnin gücünü (balla), A seysmoqrafın baş vermiş zəlzələdə qeyd etdiyi seysmik dalğaların maksimum amplitudunu (mikronla), A_0 isə seysmoqrafın qeyd edə bildiyi ən zəif zəlzələyə uyğun (buna “sıfır zəlzələ” də deyilir) seysmik dalğanın amplitududur (1 mikron = 10^{-6} m).

$M = \lg\frac{A}{A_0}$ düsturunu $A = A_0 10^M$ kimi də yazmaq olar. Deməli, Rixter şkalası ilə 4 ballıq zəlzələnin seysmik dalğalarının amplitudu 3 ballıq zəlzələdəkindən 10 dəfə böyükdür.

a)Baş vermiş zəlzələnin amplitudunun (A) maksimal qiyməti, A_0 qiymətindən $10^{7,1}$ dəfə böyük olmuşdur. Neçə bal gücündə zəlzələ baş vermişdir?

b) 4,7 bal gücündəki zəlzələnin seysmik dalğa amplitudu 4 bal gücündəki zəlzələnin amplitudundan neçə dəfə böyükdür?

c) 1906-cı ildə San-Fransiskoda Rixter şkalası ilə 8,3 bal gücündə zəlzələ baş verdi. Eyni ildə Kolumbiya - Ekvador sərhədində baş verən zəlzələnin amplitudu bu zəlzələnin amplitudundan 4 dəfə böyük olmuşdur. Kolumbiya-Ekvador sərhəddində baş verən zəlzələ Rixter şkalası ilə neçə bal gücündə olmuşdur?

d)1976-cı il iyulun 28-də Çində baş vermiş 8,5 bal gücündə zəlzələ zamanı 240000 nəfər, 1990-cı ildə İranda baş verən 7,4 bal gücündə zəlzələ zamanı isə 50000 nəfər həlak olmuşdur. Bu iki zəlzələnin amplitudlarını müqayisə edin.

4. Təsəvvür edin ki, bank hesabındakı 1000 manat ilkin məbləğ eksponensial olaraq dəyişir. Bu məbləğ 7 ildə iki dəfə artmışdır. *t* ildə hesabdakı məbləği $A(t) = 1000\cdot 2^{\frac{t}{7}}$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada *t* illərin sayını, $A(t)$ isə hesabdakı məbləği göstərir.

a) 5 ildən; 10 ildən sonra hesabda neçə manat olacaq?

b) A(0) və A(8) qiymətlərini hesablayın və real situasiyaya uyğun şərh edin.

5. Biologiya. Bioloqlar filin ayaq izlərinin ölçüsünə (l) görə, onların yaşını (a) təxmin edə bilirlər. Bunun üçün onlar $l = 45 - 25{,}7e^{-0{,}09a}$ düsturundan istifadə edirlər.

Ayaq izi a) 28 sm; b)36 sm olan filin yaşını hesablayın.

Üstlü tənliklər

Üstlü funksiyaların xassəsi. $a \neq 1$, $a > 0$ şərti ilə $a^x = a^y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.
Bu xassəyə görə alırıq:
1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ üstlü tənliyi $f(x) = g(x)$ tənliyi ilə eynigüclüdür.
2) $a^x = c$ tənliyini $c > 0$ olduqda $a^x = a^{\log_a c}$ şəklində yazsaq, $x = \log_a c$ alarıq.
Verilmiş üstlü tənliklər müəyyən üsullarla sadə üstlü tənliklərə gətirilib, həll edilir.

1. Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə 1. $4^{2x} = 8^{2x-1}$ *verilən tənlik*

$(2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1}$ *eyni əsaslara gətirilir*

$2^{4x} = 2^{6x-3}$ *qüvvətin qüvvəti xassəsi*

$4x = 6x - 3$ *eynigüclü tənliyə gətirilir*

$2x = 3$; $x = 1{,}5$ *tənliyin həlli*

Yoxlama: $4^{2\cdot 1,5} = 8^{2\cdot 1,5-1}$ $4^3 = 8^2$; $64 = 64$

Nümunə 2. $2\cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$ *verilən tənlik*

$2\cdot 3^x\cdot 3 - 3^x = 45$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x(6 - 1) = 45$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$3^x = 9$ *sadələşdirmə*

$x = 2$ *tənliyin həlli*

2. Əsaslar müxtəlif olduqda tənliyin hər iki tərəfi qüvvətlərdən birinə bölməklə və ya tənliyin hər iki tərəfini eyni əsasa görə loqarifmləməklə həll etmək olar.

Nümunə 3.

$3^{2x} = 5^x$

tənliyi

$(3^2)^x = 5^x$,

$9^x = 5^x$

şəklində yazıb,

hər iki tərəfini 5^x-ə bölək

$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 1$

Buradan

$x = 0$

Nümunə 4.

$2^{x-1} = 3^x$ *verilən tənlik*

$\lg 2^{x-1} = \lg 3^x$ *hər iki tərəfi on əsasdan loqarifmlənir*

$(x - 1)\cdot \lg 2 = x \lg 3$ *loqarifmin xassəsi*

$x\cdot \lg 2 - \lg 2 = x \lg 3$ *vurmanın paylama xassəsi*

$x\cdot \lg 2 - x\cdot \lg 3 = \lg 2$ *oxşar hədlər qruplaşdırılır*

$x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 2$ *ortaq vuruq mötərizə xaricinə çıxarılır*

$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$ *tənliyin həlli*

$x \approx -1{,}7095$ *tənliyin təqribi kökü*

3. Yeni dəyişən daxil etməklə

Nümunə 5. $9^x - 2\cdot3^{x+1} - 27 = 0$ *verilən tənlik*

$3^{2x} - 2\cdot3^x\cdot3 - 27 = 0$

$(3^x)^2 - 6\cdot3^x - 27 = 0$ *qüvvətin xassəsi*

$3^x = y$ *yeni məchul daxil edilir*

$y^2 - 6y - 27 = 0$ *kvadrat tənliyə gətirilir*

$(y - 9)(y + 3) = 0$ *kvadrat tənliyin həlli*

$y = 9;\ y = -3$

$3^x = 9 \qquad 3^x = -3$ *əvəzləmə nəzərə alınır*

$x = 2 \qquad \varnothing$

Yoxlama:

$9^2 - 2\cdot3^{2+1} - 27 = 0$

$81 - 54 - 27 = 0$

$0 = 0$

Cavab: $x = 2$

Tənliyə daxil olan qüvvətlərin üstləri eyni olub, əsaslar həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri olduqda hər iki tərəfi kənar hədlərdən birinə bölüb yeni dəyişən daxil edilir.

Nümunə 6. $3\cdot4^x + 2\cdot9^x - 5\cdot6^x = 0$ *hər iki tərəfi 4^x-ə bölək*

$3 + 2\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$

$3 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ *əvəz edilir*

$2y^2 - 5y + 3 = 0$ *kvadrat tənliyə gətirilir*

$y = 1 \qquad y = \frac{3}{2}$ *kvadrat tənliyin həlli*

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ *əvəzləmə nəzərə alınır.*

$x = 0 \qquad x = 1$ *tənliyin həlli*

Öyrənmə tapşırıqları

1. Qüvvətin xassələrini tətbiq etməklə həll edin.

a) $25^x = 125$ b) $9^{x+1} = 27$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8$

d) $5^{x^2-2x-1} = 25$ e) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{x-4} = 8^{-2}$ f) $3^{2x}\cdot 2^x = 324$

g) $2\cdot3^{x+1} - 3^x = 45$ h) $4^{x+2} + 4^{x+1} = 320$ i) $3^{x+1} - 4\cdot3^{x-2} = 69$

2. Tənlikləri həll edin.

1) $4^{3x} = 8^{x-3}$ 2) $27^x = 9^{x-2}$ 3) $125^{2x-1} = 25^{x+4}$

4) $16^{2x-3} = 32^{x+3}$ 5) $2^{4x} = 4^{x+3}$ 6) $3^{x+1} = 9^{x-1}$

7) $25^{x-1} = 5^{3x}$ 8) $36^{3x-1} = 6^{2x+5}$ 9) $3^{x-2} = 27$

10) $2^{3x+5} = 128$ 11) $5^{x-3} = \frac{1}{25}$ 12) $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

13) $36^{2x} = 216^{x-1}$ 14) $3^{5x}\cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 15) $49^x = 7^{x^2-15}$

16) $81\cdot 9^{-2x-2}\cdot 9^x = 27$ 17) $9^{-3x}\cdot 9^x = 27$ 18) $16^x\cdot 64^{3-3x} = 64$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə həll edin.

a) $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$ b) $9^x - 6\cdot 3^x - 27 = 0$ c) $4^x - 14\cdot 2^x - 32 = 0$

d) $4^x - 4^{2-x} = 15$ e) $3^x + 3^{3-x} = 12$ f) $4^x - 7\cdot 2^x + 12 = 0$

4. Tənlikləri həll edin.

a) $7^{x-3} = 4^{3-x}$ b) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3\cdot 5^x$ c) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 4^{x-0,5}$

5. Hər iki tərəfi qüvvətlərdən birinə bölməklə həll edin.

a) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$ b) $4\cdot 9^x + 12^x - 3\cdot 16^x = 0$ c) $2\cdot 27^x = 3\cdot 12^x + 18^x$

6. Tənlikləri həll edin.

a) $125^x = 5\cdot 5^3\cdot 5^5\cdot \ldots \cdot 5^{17}$ b) $2^2\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot \ldots \cdot 2^{2x} = 0,25^{-10}$

7. Tənlikləri həll edin.

a) $2^{x+3} = 4^{3x-5}$ b) $9^{4x-1} = 27^{3x+5}$ c) $4^{3x-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$

d) $2^x = 7$ e) $10^{x-4} + 4 = 11$ f) $10^x + 10^{x+1} = 11$

8. Tənlikləri həll edin.

1) $10^{x-3} = 100^{4x-5}$ 2) $25^{x-1} = 125^{4x}$ 3) $3^{x-7} = 27^{2x}$

4) $36^{x-9} = 6^{2x}$ 5) $8^{5x} = 16^{3x+4}$ 6) $e^{-x} = 6$

7) $2^x = 15$ 8) $1,2e^{-5x} + 2,6 = 3$ 9) $4^x - 5 = 3$

10) $5e^{-x} + 9 = 6$ 11) $10^{2x} + 3 = 8$ 12) $0,25^x - 0,5 = 2$

13) $\frac{1}{4}\cdot 4^{2x} + 1 = 5$ 14) $\frac{2}{3}\cdot e^{4x} + \frac{1}{3} = 4$ 15) $10^{-12x} + 6 = 100$

9. Maddənin soyuması zamanı temperaturun zamandan asılılığının Nyuton düsturu $T = (T_0 - T_r)e^{-rt} + T_r$ kimidir. Burada T maddənin baxılan andakı, T_0 başlanğıc andakı temperaturunu, T_r isə ətraf mühitin temperaturunu (otaq temperaturunu), r soyuma sürətini (vahid zamanda temperaturun dəyişməsini), t zamanı göstərir.

Temperaturu 80° C olan çayın temperaturu 22° C olan otaqda 10 dəqiqədən sonra 60° C oldu.

a) Maddənin soyumasının Nyuton düsturuna görə r əmsalını tapın.

b) Neçə dəqiqədən sonra çayın temperaturu 35° C olar?

10. Tənlikləri həll edin:

a) $9^{\sin^2 x} - 27^{\cos x} = 0$ b) $2^{\sin^2 x} - 2^{\cos^2 x} + 1 = 0$

c) $|x-4|^{\frac{x^2-11x+28}{x-3}} = 1$ d) $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$

Loqarifmik tənliklər

Loqarifmik funksiyanın xassəsi. $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ olduqda, $\log_a x = \log_a y$ bərabərliyi yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, $x = y$ olsun.
Bu xassəyə görə alırıq:

1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tənliyi $f(x) > 0$ və $g(x) > 0$ olmaq şərti ilə $f(x) = g(x)$ tənliyinə eynigüclüdür. Ona görə $f(x) = g(x)$ tənliyini həll edib, tapılmış köklərin $f(x) > 0$ və ya $g(x) > 0$ şərtini ödəyib-ödəmədiyi yoxlanılır.
2) $\log_a f(x) = c$ tənliyini ekvivalent üstlü yazılışla əvəz etsək, $f(x) = a^c$ alarıq.

Loqarifmik tənliklər müəyyən üsullarla sadə loqarifmik tənliyə gətirilib həll edilir.

1) Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə sadə loqarifmik tənliyə gətirilən tənliklər

Nümunə. $\log_3 x = 2 - \log_3 2$ — *verilən tənlik*

$\log_3 x + \log_3 2 = 2$ — *hər iki tərəfə $\log_3 2$ əlavə edilir*

$\log_3 (2x) = 2$ — *loqarifmin xassəsinə görə*

$2x = 3^2$ — *ekvivalent eksponensial yazılış*

$x = 4{,}5$ — *tənliyin həlli*

2) Yeni dəyişən daxiletməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ — *verilən tənlik*

$\log_5 x = a$ — *əvəzləmə edilir*

$a^2 - a - 2 = 0$ — *kvadrat tənliyə gətirilir*

$(a - 2)(a + 1) = 0$ — *kvadrat tənliyin həlli*

$a = 2 \qquad a = -1$ — *əvəzləmə nəzərə alınır*

$\log_5 x = 2$	$\log_5 x = -1$
$x = 5^2$	$x = 5^{-1}$
$x = 25$	$x = \frac{1}{5}$

3) Eyni əsasa gətirməklə həll olunan tənliklər

Nümunə. $\log_4 x + \log_2 x = 6$ — *verilən tənlik*

$\log_{2^2} x + \log_2 x = 6$ — *loqarifmlər eyni əsasa gətirilir*

$\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 6$

$\frac{3}{2}\log_2 x = 6$ — *oxşar hədlərin islahı*

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$ — *eksponensial yazılış*

$x = 16$ — *tənliyin həlli*

Loqarifmin xassələrinin tətbiqi ilə həll olunan daha bir misala baxaq.

Nümunə. $\lg(x+4) + \lg(2x+3) = \lg(1-2x)$ *verilən tənlik*

$\lg(x+4)\cdot(2x+3) = \lg(1-2x)$ *loqarifmin xassəsi*

$(x+4)\cdot(2x+3) = (1-2x)$ *cəbri tənliyə gətirilir*

$x_1 = -1;\ x_2 = -5{,}5$

Yoxlama.: Loqarifmaltı ifadələrdə müsbətlik şərti ödənməlidir, yəni
$x + 4 > 0$, $2x + 3 > 0$, $1 - 2x > 0$ olmalıdır.
$-5{,}5$ qiyməti bu şərtləri ödəmədiyi üçün tənliyin kökü deyil.
-1 isə bu şərtləri ödəyir, deməli, tənliyin köküdür. Cavab: -1

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2 2^3 + \log_2 2^2 = \log_2 x$ b) $\log_2 16 + \log_2 2 = \log_2 x$

c) $\log_3 x - \log_3 9 = \log_3 3$ d) $\log_5 x + \log_5 x = \log_5 625$

e) $\log_x 64 - \log_x 16 = \log_4 16$ f) $\log_2 8 + \log_3 9 = \log_x 32$

2. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2(3-x) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = -1$ c) $\log_{\sqrt{3}}(2x-5) = 2$

d) $\log_2(x^2+4x+3) = 3$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x-1) = -2$

f) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3) = 2$ g) $\log_4(\log_3(\log_2(x-1))) = 0$

h) $\log_3(1+\log_3(2^x-7)) = 1$ i) $\log_7(4x-6) = \log_7(2x-4)$

j) $\ln(x^2-2x-4) = \ln 11$ k) $\log_2(2x^2-2) = \log_2(5x-4)$

3. Loqarifmin xassələrini tətbiq etməklə həll edin.

a) $\log_3 x + \log_3(x-2) = \log_3 8$ b) $\log_6(2x^2-7x+6) - \log_6(x-2) = \log_6 x$

4. Yeni dəyişən daxil etməklə tənlikləri həll edin.

a) $\log_3^2 x = 4 + 3\log_3 x$ b) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$ c) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x) = 3$

5. Hər iki tərəfi eyni əsasdan loqarifmləməklə tənlikləri həll edin.

a) $x^{\log_2 x - 2} = 8$ b) $x^{\log_5 x} = 125x^2$ c) $x^{\lg x} = 100x$

6. Tənlikləri qrafik üsulla həll edin.

a) $\log_3(x+2) = 2 - x$ b) $\log_{\frac{1}{2}} x = x - 3$

7. Tənlikləri həll edin.

a) $\log_2 x + \log_2 3 = 1$
b) $\log_3 x - \log_3 2 = 2$
c) $\log_3 x + \log_3 2 = 2$
d) $\log_3 x + \log_3 (x-2) = 1$
e) $\log_6 x + \log_6 (x-1) = 1$
f) $\log_4 (x-2) - \log_4 (x+1) = 1$
g) $\log_2 x = \log_x 16$
h) $\log_3 x - \log_x 9 = 1$
i) $\log_2 x + \log_x 8 = 4$

8. Tənlikləri həll edin.

1) $\log_5 (x-18) - \log_5 x = \log_5 7$
2) $\log_2 (x-6) + \log_2 (x-8) = 3$
3) $\log_3 (2x-1) = 2 - \log_3 (x+1)$
4) $7^{2x} = 2^{x+3}$
5) $1{,}6^{x-4} = 5^{3x}$
6) $9^{2x-1} = 71^{x+2}$

9. a -nın hansı qiymətində $1 - \log_2 a + \log_2 5 = \log_2 (a+3)$ bərabərliyi doğrudur?

10. Əvvəlcə tənliyə daxil olan loqarifmik ifadənin dəyişənin hansı qiymətlərində mənalı olduğunu araşdırın, sonra tənliyi həll edin.
a) $\log_2 x^2 = 6$ b) $2 \log_2 x = 6$

11. $\log_3 81 = x - y$ və $\log_2 32 = x + y$ olarsa, x və y-in qiymətlərini tapın.

12. Tərkibində hidrogen ionlarının verilən konsentrasiyasına görə məhlulun pH-nı tapın.
a) $[H+] = 7{,}9 \cdot 10^{-3}$ b) $[H+] = 8{,}1 \cdot 10^{-5}$ c) $[H+] = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$

13. Verilən pH-a malik məhluldakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını tapın.
a) pH = 3,1   b) pH = 6,8   c) pH = 1,8

14. **Fizika.** Altimetr adlı cihaz atmosfer təzyiqini ölçməklə dəniz səviyyəsindən olan yüksəkliyi müəyyən etməyə imkan verir. Yüksəklik (metrlə) və havanın təzyiqi (paskalla) arasındakı əlaqə $h = -8005 \ln \frac{P}{101300}$ kimidir.
Dəniz səviyyəsindən 3500 m yüksəklikdə havanın təzyiqi neçə paskaldır?

15. **Zəlzələ.** Zəlzələnin amplitudu $A = A_0 \times 10^M$ düsturu ilə hesablanır. A_0 mümkün ən zəif zəlzələnin amplitudu, M isə zəlzələnin Rixter şkalası ilə gücüdür. 5,3 bal gücündə baş verən zəlzələnin amplitudu onun ardından baş verən zəlzələdən (ardıcıl təkandan) 125 dəfə çox idi. Ardıcıl təkanın gücünü müəyyən edin.

16. **Kimya.** Sirkə turşusunun pH-ı 2,9-dur. Qarışqa turşusunda isə hidrogen ionlarının konsentrasiyası sirkə turşusundan 1,8 dəfə çoxdur. Qarışqa turşusundakı hidrogen ionlarının konsentrasiyasını tapın.

17. **Maliyyə.** 1₼ pul 6% artımla banka qoyularsa, t ildən sonra bankdakı pulun məbləğini $S = 1{,}06^t$ düsturu ilə hesablamaq olar.
a) Bu düsturdakı t dəyişənini S dəyişəni ilə ifadə edin.
b) İllik 6% artım ilə banka qoyulmuş 1000₼ pul neçə ildən sonra 1500₼ olar?

Karbon-14 izotopunun radioaktiv parçalanmasından istifadə edərək alimlər müxtəlif bitki, heyvan qalıqlarının yaşını müəyyən edirlər. Yer planetində daha çox rast gəlinən Karbon-12 izotopu radioaktiv deyil və parçalanmır. Lakin Karbon 14 izotopu radioaktivdir və parçalanır. Karbon-14 izotopu atmosferə düşən günəş şüaları ilə yaranır, fotosintez vasitəsilə bitkilərə daxil olur. Karbon-14 maddəsi bitkilərlə birlikdə onlarla qidalanan heyvanların orqanizminə daxil olur və s. Bitki və heyvanlarda karbon-14-ün miqdarı karbon atomunun 10^{-10} faizi qədərdir. Heyvan və ya bitki öldüyü zaman yeni karbon-14 izotopunu alma imkanları da yox olur. Bədənindəki isə parçalanmağa başlayır. Bu izotopun yarımparçalanma müddəti təxminən 5730 ildir. Bitki və ya heyvan qalığındakı karbon-14-ün miqdarının karbon atomuna nəzərən neçə faiz təşkil etdiyini hesablamaqla onların ölüm tarixini müəyyən etmək mümkün olur.

18. $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ düsturuna görə məsələləri həll edin. Burada m_0 maddənin ilkin kütləsini, T yarımparçalanma müddətini, t zamanı göstərir.

a) Fil sümüyü qalıqlarında karbon-14-ün 36%-i yox olmuşdur. Bu fil neçə il əvvəl yaşamışdır?

b) Radioaktiv maddənin yarımparçalanma müddəti 3 ildir. Bu maddənin ilkin kütləsi 67 q olarsa, neçə ildən sonra bu maddədən 7 q qalar?

c) Müəyyən miqdar uran maddəsinin üçdə iki hissəsinin parçalanma müddəti 0,26 milyard ildir. Uran elementinin yarımparçalanma müddətini tapın.

19. Banka qoyulmuş 2000 manat pul 8% mürəkkəb faiz artımı ilə neçə ilə 10000 manat olar?

20. Şəhərdəki əhalinin hər il 3% azaldığı müşahidə edilir. t ildən sonra bu şəhərdəki əhalinin sayı $N = N_0 \cdot 0{,}97^t$ düsturu ilə hesablanır. Burada N_0 əhalinin mövcud sayıdır. t kəmiyyətini N ilə ifadə edin.

21. Bir ölkədə əhalinin sayı 1990-cı ildən 2000-ci ilə qədər 151 milyondan 173 milyona çatmışdır.
a) Əhalinin sayının $N = N_0 \cdot (1+r)^t$ qanunu ilə dəyişdiyini bilərək, illik artım faizini müəyyən edin.
b) Əhalinin say artımı bu sürətlə davam edərsə, neçə ildən sonra bu ölkədə əhali 220 milyon olacaq?

22. Sərinləşdirici kola tipli içkinin pH-ı 2,6 , südün pH-ı isə 6,6-dır. Kolanın tərkibində hidrogen ionlarının konsentrasiyası süddən neçə dəfə çoxdur?

Üstlü bərabərsizliklərin həlli adətən $a^x > a^b$ və ya $a^x < a^b$ bərabərsizliklərinin həllinə gətirilir. Burada $a > 0$, $a \neq 1$.
Bu bərabərsizliklərin həlli isə $y = a^x$ üstlü funksiyasının artan və ya azalan olması xassəsinin köməyilə həll edilir:

$a > 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə eynigüclüdür.
$0 < a < 1$ olduqda $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) < g(x)$ ilə,
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ bərabərsizliyi $f(x) > g(x)$ ilə eynigüclüdür.

Nümunə.
$2^{x+1} > 8$ *verilən bərabərsizlik*
$2^{x+1} > 2^3$ *qüvvətin xassəsi*
$x + 1 > 3$ *eynigüclü bərabərsizlik*
$x > 2$ *bərabərsizliyin həlli*

Nümunə.
$0{,}2^{x-1} > 0{,}04$ *verilən bərabərsizlik*
$0{,}2^{x-1} > 0{,}2^2$ *qüvvətin xassəsi*
$x - 1 < 2$ *eynigüclü bərabərsizlik*
$x < 3$ *bərabərsizliyin həlli*

$c = a^{\log_a c}$ eyniliyinə görə $a^x > c$ (və ya $a^x < c$) bərabərsizliyi
$a^x > a^{\log_a c}$ (və ya $a^x < a^{\log_a c}$) bərabərsizliyinin həllinə gətirilir.

Üstlü bərabərsizlikləri müəyyən üsullarla sadə üstlü bərabərsizliyə gətirib həll edirlər.

1) Qüvvətin xassələrinin tətbiqi

Nümunə. a) $8 \cdot 4^{x-1} > 2^x$
$2^3 \cdot (2^2)^{x-1} > 2^x$
$2^{2x+1} > 2^x$
$2x + 1 > x$
$x > -1$

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} < 30$ *verilən bərabərsizlik*
$3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} < 30$ *qüvvətin xassəsi*
$3^x(3 + \frac{1}{3}) < 30$ *qruplaşdırma*
$3^x < 30 \cdot \frac{3}{10}$ *sadələşdirmə*
$3^x < 9$
$3^x < 3^2$
$x < 2$

Qüvvət üstləri eyni olduqda qüvvətlərdən birinə bölmək əlverişli olur.

Nümunə. $2^x > 3^{2x}$ *verilən bərabərsizlik*
$2^x > 9^x$ *hər iki tərəfi 2^x-ə bölək*
$1 > (\frac{9}{2})^x$
$(\frac{9}{2})^x < (\frac{9}{2})^0$ *$a^0 = 1$ olduğuna görə*
$x < 0$

2) Yeni dəyişən daxiletmə

Nümunə. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 < 0$ *verilən bərabərsizlik*
$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ $2^x = a$ *əvəzləmə*
$a^2 - 6a + 8 < 0$ *kvadrat bərabərsizlik*
$(a - 2)(a - 4) < 0$
$2 < a < 4$ *əvəzləmə nəzərə alınır*
$2 < 2^x < 2^2$ $1 < x < 2$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

a) $3^x \geq \frac{1}{9}$ b) $0{,}2^x \leq \frac{1}{25}$ c) $1{,}5^x \leq 2{,}25$ d) $0{,}3^x \leq 0{,}09$

e) $2^x > 1$ f) $3^x < 1$ g) $4^{-x} < -1$ h) $5^x > -5$

i) $0{,}4^{x+1} > 0{,}16$ j) $3^{2-x} < 27$ k) $3^{x^2} < 9^8$ l) $4^{0{,}5x^2-3} > 8$

m) $4^x > 2^{x^2}$ n) $9^x < 36^x$ o) $5^x > 2^{3x}$ p) $2^{|x-1|} < 8$

2. Qüvvətin xassələrini tətbiq edərək bərabərsizlikləri həll edin.

a) $3^{x+3} < 27$ b) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} < 448$ c) $4^x + 4^{x-1} < 20$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$ e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \leq 26$

3. Yeni dəyişən daxil etməklə bərabərsizlikləri həll edin.

a) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$ b) $4^x + 2^x > 20$ c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

d) $3^{x-1} + 3^{2-x} < 4$ e) $5^x + 5^{1-x} > 6$

4. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $y = \sqrt{7\frac{1}{9} - \left(\frac{3}{8}\right)^{2x}}$ b) $y = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{9}{25}\right)^x}$

5. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x^2 \cdot 3^x - 3^{2+x} < 0$ b) $x^2 \cdot 3^x + 9 > x^2 + 9 \cdot 3^x$

c) $0{,}4^{\frac{x^2-4}{x+1}} \leq 1$ d) $2{,}6^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} > 1$

6. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

$625 \geq 5^{a+8}$ $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$

$10^{5b+2} > 1000$ $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$ $\left(\frac{1}{36}\right)^{v+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4v}$

7. Əsas loqarifmik eyniliyin köməyi ilə bərabərsizlikləri həll edin.

1) $8^x > 21$ 2) $6^y < 39$ 3) $e^x < 8{,}1254$ 4) $e^x > 0{,}3151$

5) $10^x > 0{,}0138$ 6) $10^y < 16{,}8125$ 7) $e^{0{,}01x} > 15$ 8) $e^{0{,}03y} \leq 4$

8. Üstlü bərabərsizlikləri həll edin.

1) $2^{x^2-3x-6} - 16 \geq 0$ 2) $\frac{e^x}{e^x - 4} \leq 3$ 3) $xe^{2x} < 4x$

Praktik məşğələ. 1) Rəngli xanalara uyğun müqayisə işarəsini yazın.

a) $\log_2 3 \blacksquare \log_2 7$ b) $\log_{0,5} 5 \blacksquare \log_{0,5} 7$

2) Rəngli xanalara elə ədədlər yazın ki, bərabərsizlik doğru olsun.

a) $\log_2 \blacksquare < \log_2 5$ c) $\log_{0,5} \blacksquare < \log_{0,5} 4$

b) $\log_2 \blacksquare > \log_2 5$ d) $\log_{0,5} \blacksquare > \log_{0,5} 4$

3) $\log_2 x \le \log_2 5$ bərabərsizliyini x-in 5-dən böyük hər hansı qiyməti ödəyirmi? x-in bu bərabərsizliyi ödəyən qiymətləri haqqında fikir yürüdün.

4) x-in $\log_{0,5} x \le \log_{0,5} 4$ bərabərsizliyini ödəyən qiymətləri haqqında müzakirələr aparın.

Loqarifmik bərabərsizliklər

Loqarifmik bərabərsizliklər dəyişənin mümkün qiymətləri, loqarifmik funksiyanın artan (və ya azalan) olması xassəsi nəzərə alınmaqla həll edilir.

Nümunə. $\log_2(x + 1) > \log_2 7$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x + 1 > 0$, $\log_2 x$ funksiyası artan olduğundan $x + 1 > 7$ olmalıdır. Deməli, $x + 1 > 0$ və $x + 1 > 7$ bərabərsizliyini ödəyən x-ləri tapmalıyıq.
Buradan $x > 6$. Cavab: $(6; +\infty)$

Nümunə. $\log_{0,2}(x - 1) > \log_{0,2} 3$
Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x - 1 > 0$, $\log_{0,2} x$ funksiyası azalan olduğundan $x - 1 < 3$ olmalıdır. Deməli, $0 < x - 1 < 3$ ikiqat bərabərsizliyini həll etməliyik.
Buradan $1 < x < 4$. Cavab: $(1; 4)$

$a > 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) > c$	$f(x) > a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) < c$	$0 < f(x) < a^c$

$0 < a < 1$ olduqda

loqarifmik bərabərsizlik	*eynigüclü bərabərsizlik*
$\log_a f(x) > \log_a c$	$0 < f(x) < c$
$\log_a f(x) > c$	$0 < f(x) < a^c$
$\log_a f(x) < \log_a c$	$f(x) > c$
$\log_a f(x) < c$	$f(x) > a^c$

Nümunə 1. $\log_5(3x-4) < \log_5(2x-2)$
bərabəsizliyi $0 < 3x-4 < 2x-2$ ikiqat bərabərsiliyi ilə
və ya $\begin{cases} 3x-4 > 0 \\ 3x-4 < 2x-2 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Buradan $x > \frac{4}{3}$ və $x < 2$ alınır. Bərabərsizliyin həllər çoxluğu: $\frac{4}{3} < x < 2$

Nümunə 2. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$ bərabərsizliyini həll edək.
Loqarifmaltı ifadənin müsbətlik şərtinə görə $x > 0$ olmalıdır.
$\log_2 x = t$ əvəz etsək, $t^2 - t - 2 < 0$ bərabərsizliyini alarıq.
Bu bərabərsizliyin həlli $-1 < t < 2$ olduğundan əvəzləməyə görə
$-1 < \log_2 x < 2$ alınır. Buradan $\frac{1}{2} < x < 4$. Cavab: $(\frac{1}{2}; 4)$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Loqarifmik bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\log_2(x+1) < \log_2 3$
b) $\log_3(x-1) > \log_3 5$
c) $\log_{0,1}(x-2) > \log_{0,1} 4$
d) $\log_4(x-3) > 2$
e) $\log_5(3x-1) < 2$
f) $\log_{0,2}(5-2x) > -1$
g) $\log_7(2x-1) > \log_7(x+2)$
h) $\log_5(3x-4) \le \log_5(x+2)$
i) $\log_{0,5}(4x-11) < \log_{0,5}(x-11)$
j) $\log_{0,2}(2x-8) > \log_{0,2}(x-1)$

2. Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\log_5(x-9) > 3$
2) $\log_7(4x-3) > 0$
3) $\log_7(2x-1) < 2$
4) $\log_2(x+20) \ge 5$
5) $\log_4(x+\frac{1}{2}) \ge -1$
6) $\lg(5x+150) \le 1$
7) $\log_7(2x-5) \ge 2$
8) $\log_8(x+5) \le 1$
9) $\log_2(x-\frac{2}{3}) \le -2$

3 Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\log_5(3-2x) \ge \log_5(4x+1)$
2) $\log_{0,3}(10x+3) < \log_{0,3}(7x-21)$
3) $\lg x + \lg(x+1) > \lg 2x$
4) $\lg x + \lg(2-x) < 1$
5) $\lg x - \lg(2-x) > 0$
6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > 0$
7) $\lg(x^2-x+8) \le 1$
8) $\log_3(x^2-2x) < 1$
9) $\log_2(x^2-x-6) + \log_{0,5}(x-3) < 2\log_2 3$
10) $\log_{\sqrt{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 64$
11) $\log_2(x^2-3x-10) - \log_2(x+2) \le 2$
12) $|3-\log_2 x| < 2$
13) $\log_\pi(x) + \log_\pi(x+1) < \log_\pi 2$
14) $\log_{0,6}(4-x) \ge \log_{0,6} 2 - \log_{0,6}(x-1)$
15) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$
16) $\log^2_{0,1} x + 3\log_{0,1} x < 4$
17) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$
18) $\log^2_{0,1} x - 1 \ge 0$
19) $\log_3(\log_{0,5}(2x-1)) > 0$
20) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\sqrt{5}}(x-9)) > -1$
21) $|1-2\log_3 x| < 3$
22) $|1-\log_3 x^2| < 3$

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. İllik 8% mürəkkəb faiz artımı ilə bank hesabındakı 1000 manat pul neçə ildən sonra ən azı 1500 manat olar? (Hesabdakı pul $S = S_0e^{rt}$ qanunu ilə dəyişir.)

Həlli: Hesabdakı pul Ən azı 1500

S $\geq$ 1500

$1000e^{0,08t} \geq 1500$ *verilənlərə görə*

$e^{0,08t} \geq 1,5$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi 1000-ə bölünür*

$\ln e^{0,08t} \geq \ln 1,5$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi loqarifmlənir*

$0,08t \geq \ln 1,5$ *loqarifmin xassəsi*

$t \geq \dfrac{\ln 1,5}{0,08}$ *bərabərsizliyin hər iki tərəfi 0,08-ə bölünür*

$t \geq \dfrac{0,4054}{0,08}$ $t \geq 5,068$ $t \geq 5,1$ *hesablamalar*

Cavab: təxminən 5,1 ildən sonra hesabdakı pul 1500 manatdan çox olacaq.

4. Əhalinin sayının zamandan asılı dəyişməsini $P = P_0e^{kt}$ düsturu ilə hesablamaq olar. Burada P_0 mövcud əhalinin sayını, k artım sürətini, t illərin sayını, P isə t ildəki əhalinin sayını göstərir. 2000-ci ildə A şəhərindəki 8,5 min nəfər əhali sayı artaraq 2010-cu ildə 9,4 min nəfər oldu.
a) Əhalinin artım sürətini (k əmsalını) tapın.
b) Bu şəhərdə neçənci ildə əhalinin sayı 10 min nəfər olacaq?
c) Əgər 2000-ci ildə B şəhərindəki əhalinin (minlərlə) sayını $y = 9,5e^{0,00278t}$ düsturu ilə modelləşdirmək mümkündürsə, neçə ildən sonra A şəhərindəki əhalinin sayı B şəhərindəkindən çox olacaq?

5. İctimai təşkilatın üzvlərinin hər il 7% azaldığı müşahidə edilir. N mövcud üzvlərin sayı olarsa, t ildən sonra birliyin üzvlərinin sayını $P = N(1 - 0,07)^t$ düsturu ilə hesablamaq olar. Əgər 2010-cu ildə bu birliyin 5000 nəfər üzvü var idisə, neçə ildən sonra onların sayı 2500 nəfərdən az olar?

6. Tapılan qalıqda karbon-14 –ün t ildən sonra qalan miqdarını (qramla) $C = 20\, e^{-0,0001216t}$ düsturu ilə hesablamaq olar.
a) Qalıqdakı karbon-14 –ün ilkin miqdarını tapın.
b) 10 000 ildən sonra qalıq karbon-14 –ün miqdarı neçə qram olacaq?
c) Təxminən neçə ildən sonra bu obyektdəki karbon-14 –ün miqdarı 10 qramdan az olacaq?

1. Verilən düsturlara görə n-i tapın.

a) $M = 3e^{-2n} + 5$ b) $a^{2n} = b^2$ c) $y = ae^{4n}$

2. Mehman dayı satdığı evin 90 000 manat pulunu bir illiyinə bankda saxlamağı düşünür. Bank iki depozit növü təklif edir: bunlardan biri illik 9 % mürəkkəb faiz artımı ilə yarımillik hesablamalarla, digəri isə gündəlik hesablamalarla. Bu iki təklif arasında gəlirdə fərq olacaqmı?

3. Təsəvvür edin ki , siz 500 milliqram aspirin qəbul etmisiniz. Aspirinin t saatdan sonra qandakı miqdarını $y = 500 \cdot (0,8)^t$ kimi modelləşdirmək olar. Neçə saatdan sonra qanda 50 milliqramdan az aspirin qalmış olacaq?

4. Hidrogen ionunun konsentrasiyasına görə pH-ı müəyyən edin.

a) limon suyu: $[H+] = 7,9 \times 10^{-3}$ mol/l b) ammoniak: $[H+] = 10^{-11}$ mol/l

c) sirkə: $[H+] = 6,5 \times 10^{-3}$ mol/l d) portağal suyu: $[H+] = 3,2 \times 10^{-4}$ mol/l

5. Tənlik və bərabərsizlikləri həll edin.

1) $6^x \geq 42$ 2) $5^x = 52$ 3) $8^{2a} < 124$ 4) $4^{3p} = 10$

5) $20^{x^2} = 70$ 6) $2^{x^2-3} = 15$ 7) $8^{2n} > 52^{4n+3}$ 8) $2^{2x+3} = 3^{3x}$

9) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+1}) = 2$ 10) $(x-2)\cdot\log_5(x+1) = 0$ 11) $(x^2-4)\cdot\log_3 x = 0$

12) $\log_x 3 > 0$ 13) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4) < 4$ 14) $(x+1)\cdot\log_2(x+1) > 0$

6. Cəmil hazırladığı təqdimatda şəhərdəki əhalinin 11450 nəfərdən 95600 nəfərə çatdığı və artım sürətinin 4,32% olduğu haqqında cədvəl çəkmişdir. Lakin bu artımın neçə ildə baş verdiyini qeyd etməyi unutmuşdur. İllərin sayını siz tapın.

7. Sadələşdirin.

a) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ b) $\log_3 \dfrac{x^3}{27}$ c) $5\ln x + \ln y + \dfrac{1}{3}\ln z$

8. $\log_b x = 0,2$ olarsa, $\log_b(x \cdot \sqrt[3]{x})$ ifadəsinin qiymətini tapın.

9. $y = \log_2 8x^3$ funksiyasının qrafikini $y = \log_2 x$ funksiyasının qrafikindən hansı çevrilmələrlə almaq olar?

10. $\log_t M = 1,28$ və $\log_t N^2 = 1,74$ olduğunu bilərək hesablayın.

a) $\log_t N$ b) $\log_t (MN)$ c) $\log_t \dfrac{N^2}{\sqrt{M}}$

11. Qrafiki (1; 1) və $(3; \dfrac{1}{9})$ nöqtələrindən keçən $y = ab^x$ üstlü funksiyasının düsturunu yazın.

12. **Sağlamlıq və fizika. Mütəxəssislər 85 db-dən yuxarı olan səslərdə qulaqlara xüsusi səsqoruyucu geyməyi məsləhət görürlər.**

a) Odundoğrayan aparatın səsinin şiddəti 80 db, səs gücləndiricininki (player) isə 110 db-dir. Səsgücləndiricinin səsinin intensivliyi odundoğrayanın səs intensivliyindən neçə dəfə çoxdur?

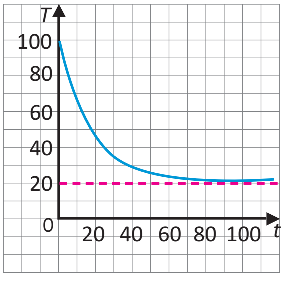
b) Pıçıtının intensivliyindən 100 000 dəfə güclü səs insan səhhəti üçün heç bir təhlükə yaratmır. Pıçıltının şiddəti 20 db olarsa, təhlükəsiz hesab edilən səsin şiddətini hesablayın.

13. Sosioloqlara görə, yeni xəbər adamlar arasında eksponensial sürətlə yayılır. $y = 2000\,(1 - e^{-0{,}03t})$ funksiyası yeni ticarət mərkəzinin açıldığı xəbərinin t saatda 2000 nəfər arasında yayılmasını ifadə edir.

a) Yeni ticarət mərkəzinin açılışını 24 saat sonra neçə nəfər biləcək?

b) Bu funksiyanın qrafikini qrafkalkuyatorla qurun və neçə saatdan sonra bu adamların 90%-nin bu xəbəri eşitdiyini təxmin edin.

14. Bir fincan su 100°C-yə qədər qızdırılmış və otaq temperaturunda 20°C-yə qədər soyumuşdur. Suyun temperaturu hər dəqiqədən bir ölçülmüş və koordinat müstəvisi üzərində temperaturun zamandan asılılığını göstərən nöqtələr qeyd edilmişdir. Bu nöqtələr birləşdirilmiş və şəkildəki qrafik alınmışdır. Məlum olmuşdur ki, suyun temperaturu ilə otaq temperaturu arasındakı fərq hər 5 dəqiqədə 25% olmaqla eksponensial qaydada azalır. Suyun temperaturunun zamandan asılı dəyişməsini ifadə edən funksiyanın düsturunu $T = l \cdot a^{kt} + n$ şəklində yazmaq olar. Qrafikə görə l, a, k, n dəyişənlərinə uyğun ədədi məlumatları tapın və funksiyanın düsturunu yazın.



15. Seymur 15000 manata yeni avtomobil aldı. Avtomobilin qiyməti hər il 15% aşağı düşür. Neçə ildən sonra Seymur avtomobili 3000 manatdan ucuz olacaq?

16. Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə ifadələri sadələşdirin və qiymətini tapın.

a) $9\log_9 3 - \log_9 75 + 2\log_9 5$ b) $\log_2 98 - 2\log_2 7 - 2$

c) $2\log_3 6 - 3\log_3 2 + \log_3 18$ d) $\frac{1}{2}\log_2 36 + \log_2 12 - 2\log_2 3$

17. $y = \lg x^2$ və $y = 2\lg x$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu funksiyaların fərqli və oxşar cəhətlərini yazın. $\lg x^2 = 2\lg x$ bərabərliyi dəyişənin hansı qiymətlərində doğrudur?

10 Məlumatlar, proqnozlar

Külliyyat və seçim
Təsadüfi seçim və növləri
Məlumatın təqdimi
Binomial açılışlar
Bernulli sınaqları

Bu maraqlıdır. "The Literary Digest" jurnalı Amerikada prezident seçkilərinin nəticələrini əvvəlcədən proqnozlaşdırmaqla böyük nüfuz qazanmışdı. Jurnal son 5 prezident seçkisinin nəticələrini az xəta ilə seçkidən əvvəl proqnozlaşdırmışdı. Lakin 1936-cı ildə resbublikaçıların namizədi Alf Landonun demokratların namizədi Franklin Ruzveltə böyük fərqlə qalib gələcəyi ilə bağlı proqnozunda böyük səhvə yol vermişdi. Səbəbi isə jurnalın sorğuda iştirak edən respondentləri düzgün seçməməsi idi. Belə ki, sorğu jurnalın oxucuları arasında aparılmışdı. Sonradan isə məlum olmuşdu ki, oxucular arasında Respublikaçılar Partiyasından olanlar üstünlük təşkil edir.

Statistika və ehtimala aid əsas anlayışlar və metodlar müasir dünyada prosesləri daha düzgün qiymətləndirməyə kömək edir. Hər iki sahədə araşdırma aparılarkən obyekti əhatə edən külliyyat və külliyatdan seçilmiş nümunələrə və ya qısaca olaraq seçim adlanan kiçik qruplar əsas götürülür. Statistikada seçilmiş nümunə əsasında aparılmış tədqiqata görə külliyyat haqqında fikir yürüdülür. Ehtimalda külliyyata görə seçilmiş nümunə haqqında fikir yürüdülür.

Statistik sorğular apararkən nümunələr adətən təsadüfi seçimlərlə formalaşdırılır. Bu halda külliyyata daxil olan hər bir nümunənin seçim şansı eyni olur. Təsadüfi seçim texnikaları da müxtəlif olur.

- Sadə təsadüfi seçim
- Sistematik təsadüfi seçim
- Klaster təsadüfi seçim
- Təbəqəli təsadüfi seçim

Sadə təsadüfi seçim. Tutaq ki, sinifdə üç nəfərlik qrup yaratmaq lazımdır. Bunun üçün bütün şagirdlərin adları yazılmış kartlar qutuya yığılır və təsadüfi olaraq üç nəfərin adı çıxarılır. Bu halda bütün üçlük qrupların seçilmə şansları eyni olur.

Sadə təsadüfi seçimdə n elementli seçimin hər bir elementinin seçilmə şansı eynidir.

Sistematik seçim. Tutaq ki, böyük ticarət mərkəzinin rəhbərliyi alıcıların mərkəzdə təxminən nə qədər vaxt keçirdiyi haqqında məlumat toplamaq fikrindədir. Gün ərzində mərkəzə gələnlərin sayının təxminən 2000 nəfər olduğu araşdırılmış və onların 5%-nin (yəni 100 nəfərin) nümunə olaraq seçilməsi qərara alınmışdır. Bu şəxslər necə seçilsə, daha düzgün olardı? Bu şəxslərin seçimi gün ərzində mərkəzə gələnlərin hər 20 nəfərindən birinin fikrinin soruşulması ilə aparıla bilər. Məsələn, ilk 20 nəfərdən 16-cı şəxsin fikri soruşulmuşsa, daha sonra, 36-cı, 56-cı və s. şəxslərin fikri soruşulacaq. Bu cür seçim sistematik seçim adlanır.

Sistematik seçimdə külliyyatın k%-nin nümunə olaraq seçilməsi nəzərdə tutulmuşsa, hər $\left[\frac{100}{k}\right]$-cı elementindən istifadə edilir.

Klaster seçim. Hər birində 15 detal olan 1000 qutu detalın keyfiyyəti haqqında məlumat vermək tələb olunur. Bunun üçün 300 detalın keyfiyyətinin yoxlanılması qərara alınmışdır (2%-nin). Bütün detalları qutulardan çıxarmaq, onları qarışdırmaq və təsadüfi seçmə ilə 300-nü ayırmaq çox vaxt və xərc tələb edir. 1000 qutudan təsadüfi seçmə ilə 20-sini seçib, bu qutulardakı detalları yoxlamaqla bütün detallar haqqında fikir yürütmək olar. Burada hər qutu bir klasterdir. Bu cür seçimlər **klaster seçim** adlanır. Düzgün statistik məlumat əldə etmək üçün hər seçilmiş klasterə daxil olan bütün elementlər yoxlanılmalıdır.

Klaster seçimdə kulliyyat klasterlərdən ibarət olur. Klasterlərdən təsadüfi seçim aparılır və seçilən klasterin bütün elementləri araşdırılır.

Təbəqəli seçim. Tutaq ki, məktəbdə "Dərsdən sonra məktəb kitabxanasında oturub bədii ədəbiyyat oxumaq istərdinizmi?" sualı ilə şagirdlər arasında araşdırma aparmaq planlaşdırılır. Bu sorğunun məktəbin həyatindəki təsadüfi seçilmiş şagirdlərlə aparılması məqsədəuyğun deyil. Çünki fikri soruşulan şagirdlər eyni sinifdən ola bilər və s. Sorğu hər yaş qrupundan olmaqla təsadüfi seçilmiş şagirdlər arasında aparılmalıdır. Bu cür təsadüfi seçim **təbəqəli (laylı, qruplu) seçim** adlanır. Əgər məktəbdə bu siniflərdə 1265 şagird varsa, onlardan 385 nəfəri 8-ci, 350 nəfəri 9-cu, 280 nəfəri 10-cu, 250 nəfəri 11-ci sinif şagirdi olarsa və 10 % təsadüfi seçilmiş şagirdin fikri öyrəniləcəksə, hər sinifdən təsadüfi seçmə ilə şagirdlərin 10%-nin fikri öyrənilməlidir. Bunların 39-nun 8-ci, 35-nin 9-cu, 28-nin 10-cu, 25-nin 11-ci sinifdən təsadüfi seçilmiş şagirdlər olması məqəsədəuyğundur.

Təbəqəli seçimdə əvvəlcə külliyyat təbəqələrə ayrılır, sonra hər təbəqədən təsadüfi seçimlər aparılır.

Bəzən araşdırma üçün təsadüfi seçimlər aparmaq mümkün olmur. Məsələn, dietoloqlar hər hansı diet menyusunu təsadüfi seçimlə deyil, könüllü olaraq iştirak etmək istəyənlər arasından seçməli olurlar.

Doğru seçim, səhv seçim

Sorğu aparan təşkilatlar mövzuya aidiyyatı olan hər bir şəxsin fikrini öyrənmək üçün maddi və texniki imkanlara malik olmurlar. Bu səbəbdən də kiçik qrupların fikrini öyrənməklə kifayətlənməli olurlar. Sorğuda iştirak edənlərin düzgün müəyyən edilməsinin əhəmiyyəti böyükdür. Məsələn, idman mərkəzinə gələn şəxslərə görə bütün şəhər əhalisinin həftədə neçə dəfə idmanla məşğul olduqları haqqında doğru fikir yürütmək mümkün deyil. Yaxud da hər hansı şəxsin parlamentin üzvü seçiləcəyi haqqında onun işlədiyi kollektivdə və ya yaşadığı ərazidə araşdırma aparmaqla fikir yürütmək səhv proqnozla nəticələnər.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən məlumatlarda külliyyat və seçimi müəyyən edin.

a) Şəhər meri vəzifəsinə seçkilərdə 3 nəfər namizəddən hansının seçiləcəyi haqqında seçicilərdən 2000 nəfərin fikri öyrənilmişdir.

b) 300 kq ağ un və 50 kq qara un qarışdırılaraq çörək bişirilir. 1 kq undan

3 çörək bişirilir. 70 çörəkdən nümunə götürülür.
c) Fermer 4 hovuzda yetişdirdiyi xanı balığının kütlə artımını yoxlamaq üçün hər hovuzdan 30 balığın kütləsini yoxladı.
d) Satıcı mağazaya daxil olan hər 10 nəfərdən birinə olmaqla 40 nəfərə yeni pendirdən dadmasını təklif edir.
e) Həkim-dietoloq qəsəbədə yaşayan və yaşı 70-dən yuxarı olan 12 qadından könüllü olaraq iki həftə ərzində hər səhər klinikaya gəlib liflərlə zəngin buter-burod yeməyi xahiş edir.

2. Aşağıdakılardan hansı doğru seçimdir?

a) Sinifdə növbətçi seçmək üçün şagirdlərin adları kağıza yazılaraq, qutuya yığılmış və beş ad qutudan çıxarılmışdır.
b) 10^a sinfindəki şagirdlərin valideynləri arasında aparılan sorğuya görə məktəbli formasının rəngi və modeli seçilir.
c) Şəhər telefon nömrəsi kitabındakı hər on beş nəfərdən birinə zəng edərək, hansı namizədə səs verəcəyi öyrənilmişdir.

3. Doğru seçim olan və olmayan situasiyalara aid bir nümunə yazın.

4. Hər bir situasiyada hansı təsadüfi seçim texnikasından istifadə edildiyini müəyyən edin.

a) Hava yolları şirkəti təyyarəyə daxil olan hər beş sərnişindən birinə hədiyyə təqdim etdi.

b) Məktəbin təsadüfi seçilmiş 5 müxtəlif sinifindən təsadüfi seçilmiş 20 şagird arasında həmin məktəbdə riyaziyyatın tədrisinin səviyyəsini yoxlamaq üçün sorğu keçirildi.

c) Aviaşirkət xidmətin səviyyıəsini yoxlamaq üçün təsadüfi seçilmiş 5 reysdəki bütün sərnişinlərin fikrini öyrəndi.
d) Araşdırma zamanı təsadüfi seçilmiş 5 kişinin və 5 qadının rəyi soruşuldu.
e) Dietoloqlar 30-40, 40-50, 50-60 yaş qrupunun hər birindən ən azı 15 nəfər arasında müşahidələr apardıqdan sonra aşağı qlükoz tərkibli yeni dietlər haqqında fikir söyləməyin mümkün olacağını bildirdilər.

5. Ev satışı üzrə menecer bir küçədəki 10 ev üçün yeni endirim kampaniyası haqqında telefonla məlumat verməyi planlaşdırır. Küçədə 100 ev var. Menecer əvvəlcə 1və 10 nömrəli evləri qeyd etdi və onlardan birinə zəng etdi, məsələn 8-ci evə. Daha sonra isə hər sonrakı 10-cu evə, yəni 18-ci, 28-ci və s zəng etdi.
a) Menecerin bu cür seçimi hansı təsadüfi seçim texnikasına aiddir.
b) Bütün evlərin seçilmə şansları eynidirmi?
c) Bu texnika sadə seçim texnikasından nə ilə fərqlənir?

6. Məktəb rəhbərliyi şagirdlərin riyaziyyat və təbiət fənləri üzrə qiymətləri arasında əlaqənin olub olmadığını araşdırmağı planlaşdırır. Məktəbdə təhsil alan 800 şagirddən 350 nəfəri həm riyaziyyat,həm də təbiət fənləri üzrə keçirilən qiymətləndirmədə iştirak etmişdir. Onlardan təsadüfi seçmə ilə 70 nəfərinin xüsusi qiymətləndirməyə cəlb edilməsi nəzərdə tutulur.

Siniflər	Şagirdlərin sayı
8-ci sinif	90
9-cu sinif	100
10-cu sinif	75
11-ci sinif	85

a) Cədvəldə verilmiş məlumata görə təsadüfi seçimlə hansı sinifdən neçə nəfərin seçilməsinin məqsədəuyğun olduğunu müəyyənləşdirin.
b) Burada hansı seçim texnikasından istifadə edilir?

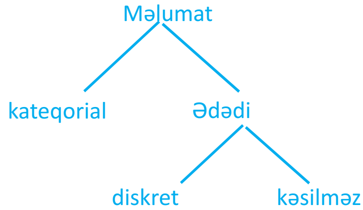
Göstəriş. Hər sinifdən seçimin sayı ümumi saya mütənasib olmalıdır.
8-ci sinifi təmsil edənlərin sayı: $\frac{x}{70} = \frac{90}{350}$

7. Qruplar yaratmaq üçün 1-dən 5-ə qədər rəqəmlərin yazıldığı kartlar bir nəfər tərəfindən idmançılara paylandı. Eyni rəqəmləri alan idmançılar bir qrupda birləşdirildi. Bu seçim təsadüfi seçimdirmi? Seçimin ədalətli olduğuna əmin olmaq mümkündürmü? Daha ədalətli olması üçün siz seçimi necə təşkil edərdiniz?

8. “Micro Tik” şirkəti hər ay 14 500 kompüter prosessoru istehsal edir. Bu ay istehsal edilən prosessorların təsadüfi seçilmiş 2000 ədədindən 8-nin defektli olduğu aşkar edildi. a) Bu situasiyada külliyyatın, seçimin ölçüsünü müəyyən edin. b) Verilən məlumata görə bu ay istehsal edilmiş prosessorlardan neçəsinin defektli olacağını söyləmək olar?

9. “Son xəbərləri haradan əldə edirsiniz?” sorğusunu aparmaq üçün, təsadüfi seçmə ilə Respublikamızın 5 rayonu, hər rayondan 5 kənd və hər kənddən 20 ev müəyyən edildi. Küliyyat və seçimi müəyyən edin. Bu hansı seçim texnikasına aiddir?

Statistik məlumatlar ədədi və kateqorial olmaqla iki qrupa bölünür.
Məsələn, “Neçə saat idmanla məşğul olur”, “Boyları nə qədərdir” və s. ədədi , “gözünün rəngi”, “avtomobilin markası” və s. isə kateqorial məlumatdır



Ədədi məlumatlar özləri də iki növə ayrılır:
a) diskret, kəsilən ədədi məlumatlar; b) kəsilməz ədədi məlumatlar.

Diskret ədədi məlumatlara qiymətləri sayıla bilən məlumatlar aid edilir.
Məsələn, avtobusdakı sərnişinlərin sayı: 1, 2, 3 və s. qiymətlərini alır.

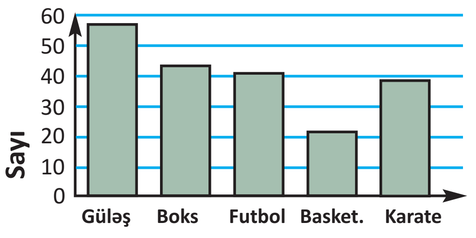
Kəsilməz ədədi məlumatlar müəyyən diapazonda dəyişən qiymətlər alır, adətən ölçmənin nəticəsi olaraq yaranır.
Məsələn, yeni doğulmuş körpələrin boyu, kütləsi və s. müəyyən intervalda istənilən qiyməti ala bilər.

Məlumatları təqdim edərkən uyğun qrafik formanın seçilməsi mühümdür. Ona görə də kateqorial və ədədi məlumatları təqdim edərkən düzgün qrafik forma seçilməlidir.

Kateqorial məlumat üçün məqsədəuygun təqdimat formaları

Nümunə 1. 200 şagird arasında hansı idman növünün daha çox sevildiyi haqqında araşdırma aparılmışdır. Burada araşdırma idman növünə aid olduğu üçün məlumat kateqorialdır. Məktəbdə adları məlum olan idman bölmələri mövcuddur. Kateqorial məlumatı təqdim etmək üçün əlverişli forma tezlik cədvəli, barqraf, dairəvi diaqram ola bilər.

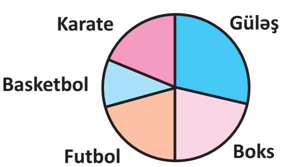
Barqraf



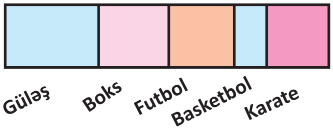
Tezlik cədvəli

İdman növü	Tezlik
Güləş	57
Boks	43
Futbol	41
Basketbol	21
Karate	38
Cəmi	200

Dairəvi diaqram



Seqmentli barqraf



Seqmentli barqrafda hər bir kateqoriyanın ümuminin (vahid qəbul edilmiş) hansı hissəsini təşkil etdiyi müəyyənləşdirilir. Vahid bu hissələrə - seqmentlərə bölünür

Öyrənmə tapşırıqları

1. 1) Kateqorial hesab etdiyiniz məlumata uyğun üç kateqoriya adı yazın.
2) Ədədi məlumatların hansı intervalda ola biləcəyini təxmin edin və yazın.
a) satılan avtomobillər rənginə görə sayı
b) gün ərzində günəşli saatların sayı
c) xəstəliyə görə buraxılan dərs günlərinin sayı
d) ev tapşırığını yerinə yetirmək üçün sərf olunan vaxt(saatla)
e) bir adamın gün ərzində qəbul etdiyi mayenin miqdarı

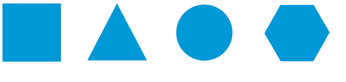
2. Hansı məlumat diskret, hansı kəsilməz ədədi məlumatdır?
a) iyul ayında temperatur dəyişməsi
b) kibrit qutusundakı kibrit çöplərinin sayı
c) sərnişinlərin özləri ilə təyyarənin salonuna götürdükləri yükün kütləsi
d) qatarın vaqonlarındakı sərnişinlərin sayı
e) küçədəki binaların mərtəbələrin sayları
f) kompüter qarşısında keçirilən vaxt

3. 24 nəfər arasında “Hansı rəngi daha çox xoşlayırsınız?” sualı ilə sorğu keçirildi. 6 nəfər qırmızı, 8 nəfər qara, 4 nəfər ağ, qalanları isə başqa rəngləri xoşladığını söylədilər. Verilən məlumat ədədi məlumatdır, yoxsa kateqorial? Məlumatı tezlik cədvəli (nisbi tezliyi göstərməklə), dairəvi diaqram və barqrafla təqdim edin.

4. Fövqəladə Hallar Nazirliyi il ərzində baş vermiş yanğın hadisələrinin səbəbləri haqqında məlumat verdi. Məlumatlar sağdakı cədvəldə yer alır. Cədvələ görə dairəvi diaqram və seqmentli barqraf qurun.

Səbəbi	Sayı
Nəzarətsiz azyaşlı uşaqlar	6
Siqaret	4
Qaz sobası	10
Elektrik	12
Bilinməyən səbəbdən	8

5. Təssəvvür edin ki, siz məktəbinizdə şagirdlər arasında “Siz şirkətinizin logosu üçün verilən formalardan hansını seçərdiniz?” sualı ilə sorğu keçirirsiniz.



a) Sorğunu hansı üsulla keçirərdiniz? Yazın.
b) Külliyyat olaraq hansı sinifləri seçərdiniz?
c) Külliyyatdan seçimi hansı texnika ilə seçərsiniz?
d) Əvvəlcədən hansı formanın logo olaraq seçiləcəyini təxmin edin. Sorğunun nəticələri ilə sizin təxminləriniz üst-üstə düşdümü?
e) Məlumatı hansı qrafik forma ilə təqdim etmək əlverişlidir? Şərti məlumatlarla çəkib göstərin.

Ədədi məlumatları təqdim etmək üçün məqsədəuygun formalar

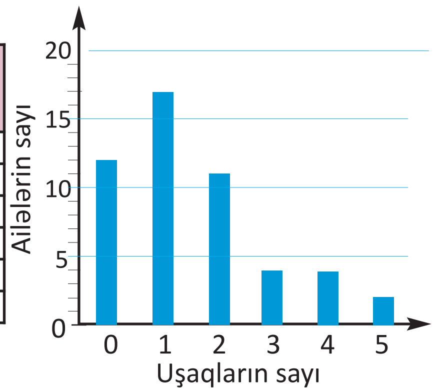
Diskret ədədi məlumatlar. Məhdud sayda diskret ədədi məlumatları təqdim etmək üçün **tezlik cədvəli, barqraf, histoqram və gövdə-budaq** kimi təqdimat formalarından istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Nümunə 2. 50 gənc ailə arasında uşaqlarının sayı barədə sorğu keçirilmişdir. Cavablar aşağıdakı kimi olmuşdur.

0 1 2 1 0	3 1 4 2 0	1 2 1 0 5	1 2 1 0 0	1 2 1 2 1
0 1 4 1 0	1 2 5 0 4	1 2 3 0 0	1 2 1 3 4	2 3 2 1 0

Yuxarıdakı ədədlər hər bir ailədəki uşaqların sayını göstərir. Sorğunun nəticələri aşağıdakı kimi tezlik cədvəli və ya barqraf ilə təqdim edilə bilər.

Uşaqların sayı	Ailələrin sayı (tellə)	Tezlik (ailələrin sayı)	Nisbi tezlik
0	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	12 : 50 = 0,24
1	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	17	17 : 50 = 0,34
2	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	11 : 50 = 0,22
3	~~IIII~~	4	4 : 50 = 0,08
4	IIII	4	4 : 50 = 0,08
5	II	2	2 : 50 = 0,04



Qruplaşdırılmış diskret ədədi məlumatlar. Histoqram

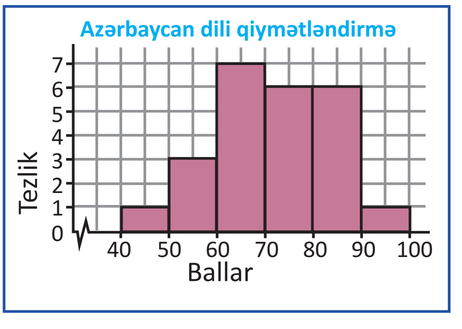
Nümunə 3. Aşağıda Azərbaycan dili fənni üzrə qiymətləndirmədən şagirdlərin topladıqları ballar (100 ballıq sistem üzrə) verilmişdir.

52 66 75 80 52 48 95 85 84 68 86 82 63 78 75 64 79 81 66 53 76 75 69 65

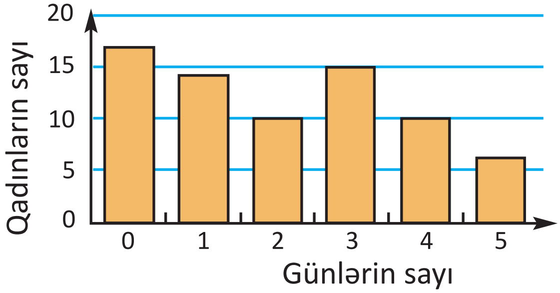
Ədədi məlumatın dəyişmə diapazonu 48-95 kimidir.
Məlumatı hər sinfin ölçüsü 10 olmaqla 6 sinifdə qruplaşdırmaq olar:
40-50, 50-60, 60-70, 70-80, 80-90, 90-100.
Məlumata uyğun tezlik cədvəli və histoqram aşağıdakı kimi olacaq.

Azərbaycan dili qiymətləndirmə

Siniflər	Tel	Tezlik
[40, 50)	I	1
[50, 60)	III	3
[60, 70)	~~IIII~~ II	7
[70, 80)	~~IIII~~ I	6
[80, 90)	~~IIII~~ I	6
[90, 100)	I	1



6. Şəhərdə qadınlar arasında "Həftədə neçə dəfə idman salonuna gedirsiniz?" sualı ilə sorğu aparılmışdır. Nəticələr barqrafda verildiyi kimi olmuşdur.
a) Bu məlumat kəsilməz ədədi məlumatdır, yoxsa diskret?
b) Bu situasiyada külliyyat və seçimi müəyyən edin. Seçimin ölçüsünü barqrafa görə tapın.
c) Sorğuda 92 nəfər iştirak etmişsə, onların neçə faizinin həftədə ən azı iki dəfə idman zalına getdiklərini demək olar?
d) Qadınlar arasından bir nəfər seçilsə, onun idman zalına həftədə bir dəfədən çox gedənlərdən olması ehtimalı nə qədərdir?



7. Mağazanın meneceri qablaşdırma və daşıma zamanı yumurta qutularından neçəsinin zədələndiyini araşdırmaq üçün beş gün mağazaya məhsul qəbulu zamanı hər 1000 qutudan 50-cini yoxladı.
a) Məlumata görə külliyyat və seçimi müəyyən edin.
b) Menecerin seçim texnikası hansı növə aiddir?
c) Əgər yoxlamalarla ən azı 5, ən çoxu 20 qutunun zədəli olduğu aşkar olunmuşsa, ümumilikdə təxminən neçə qutu yumurtanın zədəli olacağını düşünmək düzgün olardı?
d) Bu məlumat üçün iki qrafik forma seçin və təqdim edin.

8. Kompüter oyununda Yusifin topladığı ballar aşağıdakı kimi olmuşdur. Məlumatı siniflərdə qruplaşdırın və histoqramla təqdim edin.

580, 490, 520, 650, 540, 600, 630, 590, 390, 410, 670, 480,
400, 440, 560, 540, 430, 670, 490, 720, 580, 680, 590, 370,
470, 540, 490, 660, 500, 600, 390, 540, 300, 350, 600, 540,
510, 410, 480, 560, 330, 490, 540, 540, 580, 540, 270, 450

9. Cədvəldə işçilərin işə gəlmədiyi günlər haqqında məlumat verilmişdir. Bu məlumata uyğun histoqram qurun.

1-dən çox 3-dən az (1 - < 3)	24
3-dən çox 6-dan az (3 - < 6)	16
6-dan çox 9-dan az (6 - < 9)	12
9-dan çox 12-dən az (9 - < 12)	6
12-dən çox 15-dən az (12 - < 15)	2
Cəmi	**60**

Gövdə-budaq sxemi. Bu formadan məlumat az sayda olduqda istifadə etmək əlverişlidir. Ədədi məlumatın gövdə-budaq sxemi ilə təqdimi az vaxt alır və məlumatın paylanma formasını aydın görməyə imkan verir. Paylanma forması bir sıra statistik göstəriciləri (moda, median, ədədi orta, ən böyük fərq və s) asanlıqla müəyyən etməyə imkan verir.

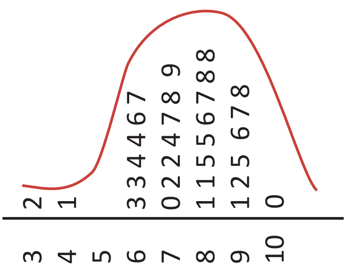
Nümunə 4. Aşağıdakı məlumat şagirdlərin qiymətləndirmə nəticələrini əks etdirir.

32, 67, 81, 92, 87, 72, 63, 88, 96, 91, 72, 63, 85, 79, 70,
85, 64, 86, 98, 100, 77, 88, 81, 64, 41, 78, 95, 74, 97, 66

Məlumata uyğun gövdə-budaq sxemi aşağıdakı addımlarla qurulur.

1. Gövdə və budaq bir-birindən şaquli və ya üfüqi düz xətlə ayrılır.
2. Ədədi məlumatın aparıcı hissəsi - böyük mərtəbədəki (və ya mərtəbələrdəki) rəqəmlərin ifadə etdiyi məlumat gövdə kimi qəbul edilir. Bu nümunədə gövdə onluqların sayını göstərən ədədlərdir. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 və 10 gövdəni təşkil edir və gövdə üçün ayrılmış hissədə yazılır
3. Növbəti rəqəm budaqları təşkil edir. Bu ədədin təklik mərtəbəsindəki rəqəmlərdir. Hər bir "gövdənin" qarşısında onun "budaqları" ardıcıl yazılır.

Gövdə	Budaq 3|2 = 32
3	2
4	1
5	
6	3 3 4 4 6 7
7	0 2 2 4 7 8 9
8	1 1 5 5 6 7 8 8
9	1 2 5 6 7 8
10	0



Öyrənmə tapşırıqları

10. Televiziya müsabiqəsinin şərtlərinə görə səsləndirilən suala ilk bir dəqiqə ərzində ən tez cavab verən iştirakçı aparıcı ilə yarışır. İştirakçıların sualı cavablandırmağa sərf etdikləri vaxt (saniyələrlə) sağdakı kimi olmuşdur. Məlumatı gövdə-budaq sxemi ilə təqdim edin.

37, 33, 33, 32, 29, 28,
28, 23, 22, 22, 22, 21,
21, 21, 20, 20, 19, 19,
18, 18, 18, 18, 16, 15,
14, 14, 14, 12, 12, 9, 6

11. Gövdə-budaq sxemi şirkətdəki işçilərin yaşını göstərir.
a) Məlumata görə ədədi ortanı, moda və medianı tapın.
b) Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

Gövdə	Budaq
2	1 3 5 8 8
3	1 2 2 3 3 5 9
4	3 5 7
5	0 2 2
6	1

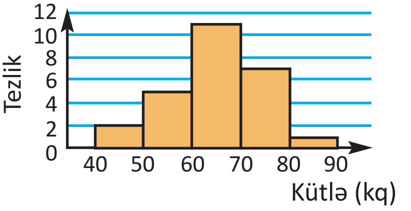
2|1 = 21 yaş

Kəsilməz ədədi məlumatların təqdimatı

Kəsilməz ədədi məlumatların təqdimat formaları qruplaşdırılmış diskret məlumatların təqdimat forması ilə oxşardır. Bəzən kəsilməz ədədi məlumatlar diskret ədədi məlumat (və tərsinə) kimi də qəbul edilir. Yəni bunlar arasında dəqiq sərhədi müəyyən etmək çətin olur.

Nümunə 5. Aparılan araşdırmanın nəticəsində məlum oldu ki, idman klubunda məşğul olan gənclərin kütləsi 40 kq-la 90 kq arasında dəyişir. Ətraflı məlumat cədvəllə və histoqramla verilmişdir.

Kütlə intervalı	Tezlik
40 – < 50	2
50 – < 60	5
60 – < 70	11
70 – < 80	7
80 – < 90	1



Öyrənmə tapşırıqları

12. Şirkətdə işçilərə telefonla ən çoxu 3 dəqiqə danışmağa icazə verilir. Bir gün ərzində qeydə alınan danışıqlar aşağıdakı kimi olmuşdur.

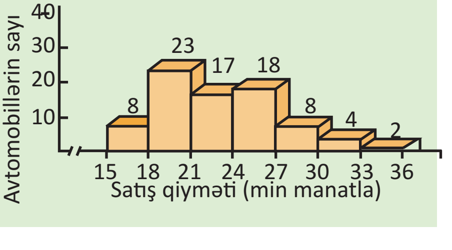
2,4; 0,2; 3,0; 2,8; 1,5; 1,9; 0,7; 1,0; 2,5; 1,3;
0,8; 2,1; 3,0; 0,4; 1,2; 3,0; 1,1; 0,3; 0,7; 1,8;
0,3; 1,0; 21; 3,0; 2,9; 0,5; 1,4; 3,0; 2,8; 1,2;
0,5; 1,0; 1,5; 0,9; 1,8; 0,6; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8

a) məlumatı gövdə-budaq sxemi ilə təqdim edin.
b) məlumatı 4 sinifdə qruplaşdırmaqla tezlik cədvəli və histoqramla təqdim edin.
c) bir dəqiqədən az davam edən danışıqların sayı bütün zənglərin sayının hansı hissəsini təşkil edir?

13. Tezlik cədvəli avtomobillərin dayanacaqda qalma müddətlərini göstərir. Cədvələ görə histoqram qurun.

Dayanma müddəti (dəqiqə)	6-25	26-45	46-65	66-85	86-105	106-125	126-145
Tezlik	60	70	90	120	80	50	40

14. Histoqram satılan avtomobillərin sayı və qiymətləri haqqında məlumatı əks etdirir. Məlumata görə tezlik cədvəli qurun. Sinifləri 15 - < 18 kimi qeyd edin. Qiyməti 18 min manatdan çox, 27 mindən manatdan az olan avtomobillər bütün satılan avtomobillərin neçə faizini təşkil edir?



Binom ikihədli deməkdir.Binomun müxtəlf qüvvətlərinə baxaq. İki ədəd cəminin kvadratı və kubunun açılışlarında müəyyən qanunauyğunluq var.

$$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

Belə ki, birinci həddin qüvvət üstü binomun dərəcəsinə bərabərdir, hər sonrakı həddə a-nin üstü bir vahid azalır, ikinci həddin (b-nin) üstü bir vahid artır.
Birinci və sonuncu həddin əmsalı 1-dir.

a və b cəminin qüvvətləri ardıcıllığını binomial açılışların ardıcıllığı kimi davam etdirmək olar. Bu açılışların hansı qayda ilə yarandığını nəzərdən keçirək.

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ kimi yazmaq olar.

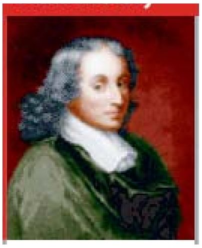
Bu hasil hər biri a və ya b olan dörd vuruğun bütün mümkün hasillərinin cəminə bərabərdir. Bu variantları ardıcıl olaraq nəzərdən keçirək.

- b həddini 0 vuruq, a həddini 4 vuruq götürsək, a^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_0$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.
- b həddini 1 vuruq, a həddini 3 vuruq götürsək, a^3b həddi alınır və bu cür ${}_4C_1$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 2 vuruq, a həddini 2 vuruq götürsək, a^2b^2 həddi alınır və bu cür ${}_4C_2$ və ya 6 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 6-dır.
- b həddini 3 vuruq, a həddini 1 vuruq götürsək, ab^3 həddi alınır və bu cür ${}_4C_3$ və ya 4 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 4-dür.
- b həddini 4 vuruq, a həddini 0 vuruq götürsək, b^4 həddi alınır və bu cür ${}_4C_4$ və ya 1 hal mümkündür və bu həddin əmsalı 1-dir.

Binomun qüvvətlərini, binomial açılışları və hədlərin əmsallarını cədvəldə yerləşdirək.

Binomun qüvvəti	Binomun qüvvətinin açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	$1a+1b$	1 1
$(a+b)^2$	$1a^2+2ab+1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$	1 4 6 4 1

Göründüyü kimi, əmsalların düzülüşü maraqlı riyazi xassələrə malik “üçbucaq” yaradır. Buna Paskal üçbucağı deyilir.



Paskal üçbucağı. Paskal üçbucağı onun yaradıcısı olan və XVI əsrdə yaşamış böyük fransız riyaziyyatçısı, fiziki və filosofu Blez Paskalın şərəfinə adlandırılmışdır. Paskal üçbucağının təpə nöqtələrində 1 dayanır. Üçbucağı təşkil edən bütün sətirlər vahidlə başlanır və vahidlə də qurtarır. Hər sonrakı sətirdəki hər bir ədəd əvvəlki sətirdəki iki qonşu ədədin cəminə bərabərdir. Hər sonrakı sətirdəki ədədlərin sayı özündən əvvəlkindən bir ədəd çoxdur.

1	$n = 0$	1
1 1	$n = 1$	1 1
1 2 1	$n = 2$	1 2 1
1 3 3 1	$n = 3$	1 3 3 1
1 4 6 4 1	$n = 4$	1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1	$n = 5$	1 5 10 10 5 1

Paskal üçbucağı	Paskal üçbucağı kombinizonla
1	${}_0C_0$
1 1	${}_1C_0$ ${}_1C_1$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
1 4 6 4 1	${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
1 5 10 10 5 1	${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$

${}_5C_2$-nin həqiqiətən Paskal üçbucağının 5-ci sətrinin uyğun elementi olduğunu yoxlayaq.

$${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2} = 10$$

Binomun qüvvəti	Açılışı	Paskal üçbucağı
$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	${}_1C_0a + {}_1C_1b$	1 1
$(a+b)^2$	${}_2C_0a^2 + {}_2C_1ab + {}_2C_2b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	${}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2y + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	${}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	${}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4b + {}_5C_2a^3b^2 + {}_5C_3a^2b^3 + {}_5C_4ab^4 + {}_5C_5b^5$	1 5 10 10 5 1

Binomun açılışında hədlərin əmsalları ardıcıl olaraq Paskal üçbucağının uyğun sətrindəki ədədlərdir. Soldan sağa 1-ci həddə a-nın qüvvəti binomun qüvvətinə bərabərdir, hər sonrakı həddə bir vahid azalır, b-nin qüvvəti isə artır.

Paskal üçbucağının növbəti 6-cı sətri aşağıdakı kimi yaranır.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ {}_6C_0 & & {}_6C_1 & & {}_6C_2 & & {}_6C_3 & & {}_6C_4 & & {}_6C_5 & & {}_6C_6 \end{array}$$

Binomial açılış üçün ümumiləşmiş düstur yaza bilərik.

Binomial açılış

İstənilən a, b ədədləri və $n \geq 0$ ədədi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ . \ . \ . \ + {}_nC_{n-1}\, a^1 b^{n-1} + {}_nC_n a^0 b^n$

"Σ" ***siqma*** işarəsindən istifadə etməklə bu düsturu qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

$(a+b)^n$ binomunun açılışında $n+1$ sayda hədd var. Binomun istənilən $(k+1)$-ci həddi $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$ şəklindədir, $(k = 0, 1, 2, ..., n)$

- n dərəcəli binomun açılışında $n+1$ sayda element var
- binomun istənilən həddini $T_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$ düsturu ilə tapmaq olar
- binomun istənilən həddinin qüvvət üstlərinin cəmi n-ə bərabərdir
- binomial əmsalların cəmi 2^n-ə bərabərdir:

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \ . \ . \ . \quad + {}_nC_{n-1} \ + {}_nC_n = 2^n$$

Binomun düsturunda $a = b = 1$ götürməklə sonuncu bərabərliyi yoxlayın.

Binomun qüvvətinin açılışında toplananın əmsalı ilə binomial əmsal bir-birindən fərqlidir.

Nümunə. $(x+2)^5 = {}_5C_0 \cdot x^5 + {}_5C_1 \cdot x^4 \cdot 2 + {}_5C_2 \cdot x^3 \cdot 2^2 + {}_5C_3 \cdot x^2 \cdot 2^3 + {}_5C_4 \cdot x \cdot 2^4 + {}_5C_5 \cdot 2^5 =$

$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

Bu ayrılışda məsələn, üçüncü toplananın əmsalı 40, onun binomial əmsalı isə ${}_5C_2 = 10$ olur.

Nümunə. $(2p-1)^6$ binomunun açılışında 4-cü həddini yazın.

Həlli: Burada $a = 2p$, $b = -1$, $n = 6$

$T_4 = T_{3+1} = {}_6C_3 \cdot a^{6-3} \cdot b^3 = 20 \cdot (2p)^3 \cdot (-1)^3 = -160p^3$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Binomun qüvvətinin açılışında neçə hədd var?

a) $(x-3y)^5$ b) $(2z+3z^2)^7$ c) $(c+6)^q$ d) $(c+6)^{k-2}$

2. Açılışları yazın.

a) $(x-3)^4$ b) $(x+2)^5$ c) $(1+2c)^6$ d) $(1-y)^5$

3. Binomun tələb olunan həddini tapın.

a) 5-ci həddini: $(x+y)^8$
b) 4-cü həddini: $(a-2b)^5$
c) 7-ci həddini: $(1-2z)^{12}$
d) ortadakı həddini: $(2x+y)^4$
e) sondan ikinci həddini: $(u^2+1)^6$
f) sondan 3 həddini: $(x-y)^{10}$

4. $(x+y)^{10}$ binomunu açmadan tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Binomun açlışındakı hədlərinin sayını yazın.
b) Binomun açılışında 6-cı həddi yazın
c) ${}_{10}C_r$ binomial əmsalının ən böyük qiyməti binomun hansı həddinə aiddir?

5. Binomial açılışları $(a+b)^n$, $n \in$ N şəklində yazın.

a) ${}_4C_0z^4 + {}_4C_1z^3t + {}_4C_2z^2t^2 + {}_4C_3zt^3 + {}_4C_4t^4$
b) ${}_5C_0m^5 + {}_5C_1m^4y + {}_5C_2m^3y^2 + {}_5C_3m^2y^3 + {}_5C_4my^4 + {}_5C_5y^5$

6. a) $(x+y)^3$ və $(x-y)^3$ binomial açılışılarının oxşar və fərqli cəhətlərini yazın. Fikirlərinizi $(x-y)^n$ binomial açılışı üçün ümumiləşdirin.

7. Paskal üçbucağının verilən sətirlərini kombinezonla ifadə edin.

a) 1 5 10 10 5 1
b) 1 7 21 35 35 21 7 1
c) 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

8. İlqar deyir ki, Paskal üçbucağının hər bir sətrini 11^n kimi ifadə etmək olar. Bu fikri yoxlayın.

9. Paskal üçbucağına görə yerinə yetirin.

a) Paskal üçbucağının verilən hər bir sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
b) Paskal üçbucağının 9-cu sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
c) Paskal üçbucağının n-ci sətrindəki hədlərin cəmini tapın.
d) Bu xassəni binomial açılışda əmsallara tətbiq edin.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

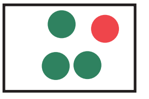
10. a) $(x+2)^n$ binomunun açılışında binomial əmsalların cəmi 16 olarsa, ikinci həddin əmsalını tapın.

b) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ -in ayrılışında x-dən asılı olmayan həddi tapın.

Bernulli sınaqları

Bernulli sxemini aydınlaşdırmaq üçün aşağıdakı məsələyə baxaq.

Məsələ. Qutuda 3 yaşıl, 1 qırmızı kürə var. Hər dəfə bir kürə çıxarılır. Çıxan kürənin yaşıl olması uğurlu (qalib) , qırmızı kürənin çıxması izə uğursuz (məğlub) hal hesab edilir. Çıxarılan kürə yenidən qutuya qaytarılır. Oyun 4 dəfə təkrarlanır. Qalib gəlmənin mümkün variantlarının ehtimalını tapın.



Qalib gəlmə ehtimalı $\frac{3}{4}$ isə (yaşıl kürənin çıxması), məğlub olmaq (qırmızı kürənin çıxması) ehtimalı $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ olacaq.

4 oyunda qələbə və məğlubiyyət saylarına görə ehtimalları hesablayaq.

1) P(4 oyunun hamısında qalib gəlmə ehtimalı) $= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

2) P(4 oyunun hamısında məğlub olma ehtimalı) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$

3) 4 oyundan 3-də qalib gəlmə variantları və hər birinin ehtimalı:

(Q,Q,Q,M) P(4-cüdən başqa hamısında qalib) $= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,Q,M,Q,) P(3-cüdən başqa hamısında qalib) $= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(Q,M,Q,Q) P(2-cüdən başqa hamısında qalib) $= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(M,Q,Q,Q) P(1-cidən başqa hamısında qalib) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

Oyunçunun 4 oyundan 3-də qalıb gəlməsinin mümkün variantlarının sayını kombinizonla da hesablamaq olar.

$${}_4C_3=\frac{4!}{3!}=4$$

Variantların ehtimalı eyni olmaqla $\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$-ə bərabərdir.

Bu hadisənin ehtimalını aşağıdakı kimi hesablamaq olar.

$$\text{P(4 oyunun 3-də qalib)} = {}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1=4\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{108}{256}$$

Analoji qayda ilə digər sityuasiyaları araşdıraq.

4) 4 oyundan 2-də qalib gəlmə ehtimalı

$$\text{P(Q,Q,M,M)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{256}$$

4 oyundan 2-sində qalib gəlməyin mümkün variantlarının sayı: ${}_4C_2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

Yəni 6 halın hər birində qalib gəlmək ehtimalı $\frac{9}{256}$-dur.

$$\text{P(4 oyundan 2-də qalib)} = {}_4C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{16}=\frac{54}{256}$$

5) 4 oyundan 1-də qalib gəlmə ehtimalı.

$$P(Q,M,M,M) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{256}$$

$$P(4 \text{ oyundan 1-i qalib}) = {}_4C_1 \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{64} = \frac{12}{256}$$

4 cəhddən 4, 3, 2, 1, 0 sayda qalib gəlmənin ehtimallarını tapdıq. Əgər bu ehtimallar düzgün hesablanmışsa, onların cəmi vahidə bərabər olmalıdır.

Yəni, P(4 uduş) + P(3 uduş) + P(2 uduş)+ P(1 uduş)+ P(0 uduş) = 1 olmalıdır.

Yoxlayaq: $$\frac{81}{256} + \frac{108}{256} + \frac{54}{256} + \frac{12}{256} + \frac{1}{256} = 1$$

Yuxarıda təsvir olunan məsələ binomial sınaqlar adlanır. Çünki bu cür məsələlərdə situasiyaları uyğun binomial açılışın hədləri ilə ifadə etmək mümkündür. Məsələn, nəzərdən keçirdiyimiz məsələ $(a + b)^4 = {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3b + {}_4C_2a^2b^2 + {}_4C_3ab^3 + {}_4C_4b^4$ binomial açılışa uyğundur.

Binomial sınaqlara Bernulli sınağı da deyilir.

Bu açılışı məsələdəki situasiyaya uyğun *p* (qalib) və *q* (məğlub) dəyişənləri ilə ifadə etsək, binomial açılışda hər bir həddin real situasiyaya uyğun gəldiyini görmək olar.

$$(p + q)^4 = {}_4C_0p^4 + {}_4C_1p^3q + {}_4C_2p^2q^2 + {}_4C_3pq^3 + {}_4C_4q^4$$

Burada *p* uğurlu hadisənin (yaşıl çıxma) ehtimalıdır və $p = \frac{3}{4}$, *q* uğursuz (qırmızı çıxma) hadisənin ehtimalıdır və $q = \frac{1}{4}$.

Bernulli sınağı və ehtimal

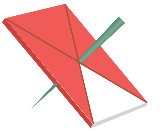
n sayda asılı olmayan sınaqda uğurlu hadisənin ehtimalı *p* olarsa, onda *m* uğurlu, *n* – *m* uğursuz hadisənin ehtimalı

$$P(n \text{ sınaqda}, m \text{ uğurlu}) = {}_nC_m p^m q^{n-m}$$ düsturu ilə hesablanır

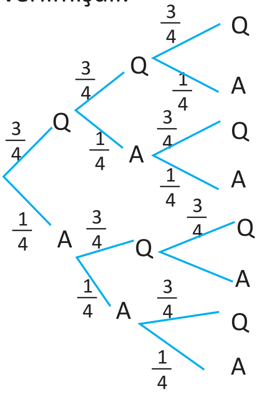
Binomial sınaq və ya Bernulli sınağı yalnız aşağıdakı şərtlər ödənildikdə doğrudur.

- Hər bir sınağın yalnız iki nəticəsi var (şərti olaraq “uğurlu” və “uğursuz”).
- Sınaqların sayı məlumdur.
- Sınaqlar asılı deyil.
- Hər bir sınaqda “uğurlu” hadisənin ehtimalı eynidir.

Bernulli sınağını sxematik olaraq aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.



Nümunə 1. Çarx 4 bərabər hissədən ibarətdir. 3 hissəsi qırmızı, bir hissəsi ağ rəngdədir. Çarx fırlandıqdan sonra ya qırmızı hissədə dayanır, ya da ağ. Üç dəfə fırlandıqda mümkün vəziyyətlər sxemlə verilmişdir.



QQQ	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
QQA	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$
QAQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$
QAA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AQQ	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$
AQA	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AAQ	1	$\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$
AAA	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

P(3 qırımızı) = $1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$

P(2 qırımızı) = $3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1$

P(1 qırımızı) = $3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

P(0 qırımızı) = $1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Göründüyü kimi, əmsallar Paskal üçbucağının 3-cü sətirindəki ədədlərlə eynidir:

1 3 3 1

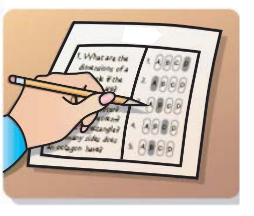
Həmçinin binomal açılışla da əlaqəni görmək mümkündür.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Burada $a = \frac{1}{4}$ və $b = \frac{3}{4}$

Bu hadisə üçün Bernulli düsturu: P(m qırmızı) = ${}_3C_m\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3-m}$ $m = 0,1,2,3$.

m-in qiymətlərini yerinə yazmaqla düsturu yoxlayın.

Nümunə 2. 5 sualın hər birinin 4 cavab variantı verilmişdir. Nərgizin 5 sualdan 4-nə təsadüfi seçimlə düzgün cavab verməsi ehtimalını hesablayın. Binomun açılışı ilə ehtimalın tapılması arasında əlaqəni araşdırın.



Həlli: Nərgizin 5 suala düzgün və ya səhv cavab verməsinin neçə mümkün variantı olduğunu tapaq.

$$(d+s)^5 = {}_5C_0d^5 + {}_5C_1d^4s + {}_5C_2d^3s^2 + {}_5C_3d^2s^3 + {}_5C_4ds^4 + {}_5C_5s^5$$

Nərgizin 5 sualdan 4-nə düzgün cavab verməsinin müxtəlif 5 variantı olduğu sxemdən görünür. Deməli, bu hadisənin ehtimalı ${}_5C_1d^4s$ kimi olacaq. Analoji olaraq digər situasiyaların da binomun hədləri arasındakı əlaqəsini görmək olar. Bu əlaqəni cədvəldə ümumiləşdirək.

s	d	d	d	d
d	s	d	d	d
d	d	s	d	d
d	d	d	s	d
d	d	d	d	s

Əmsal	Hədd	Situasiyada mənası
${}_5C_0 = 1$	d^5	5 düzgün cavabın 1 variantı var
${}_5C_1 = 5$	d^4s	4 düzgün 1 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_2 = 10$	d^3s^2	3 düzgün 2 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_3 = 10$	d^2s^3	2 düzgün 3 səhv cavabın 10 variantı var
${}_5C_4 = 5$	ds^4	1 düzgün 4 səhv cavabın 5 variantı var
${}_5C_5 = 1$	s^5	5 səhv cavabın 1 variantı var

Təsüdüfi seçmə ilə 4 suala düzgün, 1 suala səhv cavab vermək ehtimalını tapaq. Hər düzgün cavabın ehtimalı $\frac{1}{4}$ -dir. Səhv cavabın ehtimalı $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(4d,\ 1s) = 5d^4s = 5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{1024} \quad \text{və ya} \approx 1{,}5\%$$

Bu qayda ilə mümkün situasiyaların ehtimalını hesablayın, onları toplayın cəmin vahidə (və ya 100%-ə) bərabər olduğunu yoxlayın.

Nümunə 3. Dörd uşaqlı ailədəki uşaqlardan 3-nün oğlan, 1-nin qız olması ehtimalını tapın.

Hər uşaq üçün iki mümkün hal var: ya oğlandır, ya da qız. Hər ikisinin ehtimalı $\frac{1}{2}$-dir. P(n sınaqda, m uğurlu) = ${}_nC_m p^m q^{n-m}$

$n = 4, m = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$; P(4 uşaqdan,3-ü oğlan) = ${}_4C_3 p^3 q^{4-3} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Deməli, 4 uşaqdan 3-nün oğlan olması ehtimalı $\frac{1}{4}$ və ya 25%-dir.

Uyğun binomial açılışda situasiyanı ifadə edən hədd qırmızı rənglə göstərilmişdir. $(o + q)^4 = o^4 + 4o^3q + 6o^2q^2 + 4oq^3 + q^4$

P(4 uşaqdan, 3-ü oğlan)

Nümunə 4. Şirkət satış kampaniyasında uşaq yeməyi qutusunda kuponlar yerləşdirir. Hər 20 qutudan 3-nə uduşlu kupon qoyulur. 5 qutu uşaq yeməyi alan müştəri üçün 2 qutuda uduşlu kupon çıxması ehtimalı nə qədərdir? Kalkulyatordan istifadə edin.

Həlli: Uğurlu hadisə qutudan uduşlu kuponun çıxması: P (uduşlu kupon) = $\frac{3}{20}$

Uğursuz hadisə qutuda uduşlu kuponun olmaması:

$$P\ (\text{uduşlu kupon yoxdur}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$P\ (5\ \text{qutudan 2-də uduş}) = {}_5C_2 p^2 q^3 = 10\cdot\left(\frac{3}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{17}{20}\right)^3 \approx 0{,}138$$

Nümunə 5. Qəpik pul 10 dəfə atılmışdır. Ən azı 8 dəfə pulun xəritə üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalı nə qədərdir?
Həlli: Ən azı 8 dəfə xəritə üzünün düşməsi hadisəsi uğurlu hadisədirsə, deməli, 9 dəfə,10 dəfə xəritə üzünün düşməsi hadisəsi də uğurlu hadisələrdir. Bu hadisələrin ehtimalları ayrı-ayrı tapılıb toplanmalıdır. Qəpik bir dəfə atıldıqda xəritə üzünün düşmə ehtimalı $\frac{1}{2}$ -dir.

P (ən azı 8 xəritə) = P (8 xəritə) + P (9 xəritə) + P (10 xəritə)

$$P\text{ (ən azı 8 xəritə)} = {}_{10}C_8 p^8 q^2 + {}_{10}C_9 p^9 q^1 + {}_{10}C_{10} p^{10} q^0 =$$

$$= 45\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{56}{1024} \approx 0{,}55$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Hadisələrdən hansına binomial sınaq demək olar?

a) Kamal kimya fənni üzrə 20 test sualının hər birinə verilmiş 4 cavabdan birini təsadüfi seçir.
b) Plastik stəkan 50 dəfə atılır, stəkanın neçə dəfə oturacağı və ya ağzı üstə düşməsi sayılır.
c) Oyun zəri 100 dəfə atılır. Hər üzün düşməsinin bərabər ehtimallı olub olmadığlı yoxlanılır.
d) Oyun zəri 100 dəfə atılır. 4 xallı üzünün neçə dəfə düşməsi yoxlanılır.

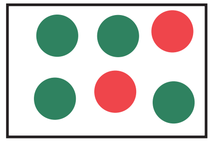
2. Qəpik pul 5 dəfə atılmışdır. Xəritə üzünün düşmə ehtimalı nə qədərdir?
a) P (bir dəfə); b) P(3 dəfə); c) P(4 dəfə); d) P(0 dəfə); e) P (2 dəfə)

3. Basketbol komandasının oyunda qalib gəlmək ehtimalı $\frac{2}{3}$ -dir. Bu komandanın növbəti 5 oyundan 3-də qalib gəlmək ehtimalı nə qədərdir?

4. Son araşdırmalar göstərir ki, yeni avtomobillərin hər 3-ündən biri kreditlə satılır. Təsadüfi seçilmiş 4 yeni avtomobildən 3-nün kreditlə alınmış olması ehtimalını hesablayın.

5. İstehsal konveyerindən bir dövrədə keçən detalların 2%-nin yararsız olduğu aşkar edildi. Təsadüfi götürülmüş 5 detaldan verilən sayda detalın yararsız olma ehtimalını tapın.
a) P (yalnız 2-si yararsız) b) P (ən çoxu biri yararsız)
c) P (ən çoxu 2-si yararsız)

6. Qutuda 6 şar var, 6 dəfə şar çıxarılmasına uyğun situasiyaların ehtimalını binomial açılış yazmaqla göstərin. Uğurlu hadisə yaşıl şarın çıxmasıdır. Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın. Bütün hadisələrin ehtimalları cəminin 1-ə bərabər olduğunu göstərməklə həllinizi yoxlayın.

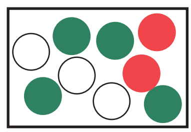


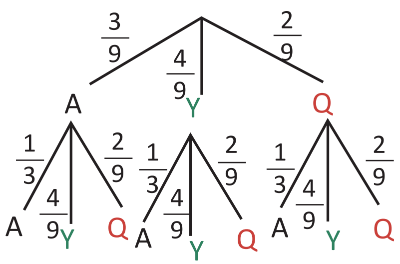
Situasiya	Binomial hədd
6 yaşıl	${}_6C_0p^6$
5 yaşıl 1 qırmızı	${}_6C_1p^5q^1$
4 yaşıl 2 qırmızı	${}_6C_2p^4q^2$
. . .	. . .
Binomial açılış: $(p+q)^x = ...$	

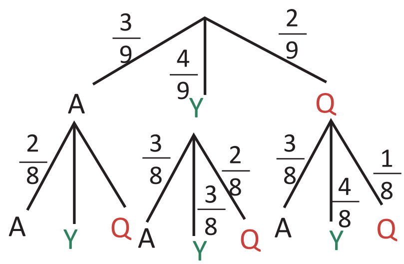
7. Yoxlama zamanı 1000 CD diskdən 50-nin yararsız olduğu aşkar olundu.
a) Təsadüfi seçilmiş bir diskin yararsız olması ehtimalı nə qədərdir?
b) Keyfiyyət nəzarətçisi təsadüfi olaraq 6 disk götürsə, situasiyalara görə ehtimalları hesablayın.

- cəmi 2 diskin yararsız olması
- ən çoxu 2 diskin yararsız olması
- ən azı 3 diskin yararsız olması

8. Qutuda 3 ağ, 4 yaşıl, 2 qırmızı şar var.
a) Təsadüfi olaraq iki şar çıxarılsa, hər ikisinin ağ olma ehtimalını hər iki sxemə görə hesablayın.
b) Sxemlər hansı hadisələri əks etdirir?
Bu hadisələrin fərqli və oxşar cəhətlərini uyğun hadisələrdən nümunə gətirməklə yazılı izah edin.







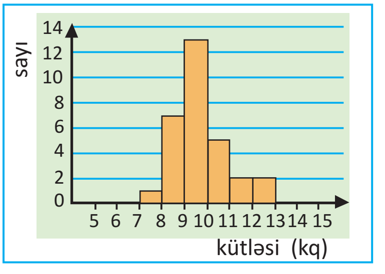
1. Qutuda 2 qırmızı, 3 ağ kürə var. Qutudan 1 kürə təsadüfən götürülür və yenidən qutuya qaytarılır. Bu sınaq 3 dəfə təkrar aparılır.
a) 1-ci və 2-ci dəfə çıxarılan kürənin ağ, 3-cü dəfə çıxarılan kürənin qırmızı olması hadisəsinin ehtimalını tapın.
b) çıxarılan 3 kürədən 2-sinin ağ olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

2. Qəpik pul 4 dəfə atılmışdır. Hər bir hadisənin ehtimalını tapın.
a) P(4 dəfə şəkil üzü) b) P(ən azı 3 dəfə xəritə üzü)
c) P (ən çoxu 2 dəfə şəkil üzü) d) P(0 xəritə üzü)

3. Qəpik atma hadisəsini əks etdirən $(x + ş)^5$ binomunun açılışını yazın. Binomun hər bir həddinin situasiyaya uyğun mənasını izah edin. Uyğun hadisələrin ehtimalını hesablayın.

4. ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ olduğunu isbat edin. n = 7, k =5 qiymətləri üçün eyniliyi yoxlayın.

5. Histoqram fermadakı hind toyuqlarının kütləsini göstərir. Histoqrama görə tezlik cədvəli qurun. Təsadüfü olaraq iki hind toyugu seçilsə, onların hər ikisinin kütləsinin 10-kq-dan çox olma ehtimalı nə qədərdir?



6. Qutuda 4 ağ, 2 yaşıl kürə var. Onlardan 3-ü təsadüfən çıxarılır.
a) Rənginə görə hansı tərkibli kürələrin çıxması daha ehtimallıdır?
b) Çıxarılan 3 kürədən ən azı 2-sinin ağ olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

7. Verilmiş sözün hərflərini oxunuşu müxtəlif olan neçə variantda düzmək olar?
a) MUĞAN **b) QƏBƏLƏ**

8. Atıcının bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalı 0,8-dir. Dörd atəşdən iksində hədəfi vurma ehtimalını tapın.

9. Dostuna zəng etmək istəyən Mustafa nömrənin son 2 rəqəmini unutmuşdur. Bu rəqəmlərin müxtəlif olduğunu bilərək, onun ilk dəfə təsadüfi yığdığı nömrənin düzgün olması ehtimalını tapın.

10. Beş nəfər (A, B, C, D və E) neçə müxtəlif üsulla sıraya düzülə bilər?
a) E-nin ortada olması şərtilə
b) A və B-nin yanaşı olması şərtilə
c) A və B-nin yanaşı olmaması şərtilə

1. Avtomobilin qiyməti alındığı birinci ildə 20%, hər sonrakı ildə isə 8% aşağı düşür. 2015-ci ildə 25 min manata alınmış avtomobilin qiyməti 2022-ci ildə neçə manat ola bilər?

2. Sinifdə 19 şagird var. Onların 10 nəfəri şahmat, 7 nəfəri futbol, 3 nəfəri isə hər iki dərnəkdə məşğul olur. Şagirdlərin neçəsi bu dərnəklərin heç birində iştirak etmir?

3. Tərkibində uyğun olaraq, 5% və 2 % nikel olan iki növ polad vardır. Tərkibində 2,5 % nikel olan 360 kq polad almaq üçün bu iki növ poladın hər birindən neçə kiloqram götürüb, birlikdə əritmək lazımdır?

4. c-nin hansı qiymətlərində verilən bərabərsizlik x-in bütün qiymətlərində doğrudur?

a) $x^2 + cx + 4 > 0$ b) $x^2 + 3x + c > 0$

5. Ardıcıllıq $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n - 2$ rekurrent münasibətlə verilmişdir. n-ci həddin düsturunu yazın.

6. Fermer yeni texnologiya tətbiq edərək, məhsul istehsalını hər il eyni faiz miqdarında artırmaqla, 2 il ərzində 150 tondan 216 tona çatdırdı. Məhsul istehsalı hər il neçə faiz artmışdır?

7. a) Hesablayın: $\sqrt[3]{(2\sin 60^\circ - 1)^3} - \sqrt{(1 - \tan 60^\circ)^2}$

b) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ olduqda $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$ ifadəsini sadələşdirin.

8. a) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\sin\beta = -\frac{9}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ olarsa, $\alpha - \beta$ bucağını tapın.

b) $\tan\alpha = 3$, $\tan\beta = -\frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ olarsa, $\alpha + \beta$ bucağını tapın.

c) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ olarsa, $(1 + \tan\alpha)\cdot(1 + \tan\beta)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

9. İfadənin qiymətini tapın.

a) $\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$

b) $\tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$

10. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sin x$ verilmişdir. Tapın: a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

11. Tənlikləri həll edin.

a) $4\cos^2 x - 3\sin x = 3$ b) $2\tan x - 3\cot x - 1 = 0$

c) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ d) $\cos 3x - \cos 4x = 1 - \cos x$

12. Tənliyin verilmiş aralıqdakı köklərini tapın.

a) $\sin x = -1,\ x \in [0; 4\pi]$ b) $\cos x = 1,\ x \in [-\pi; 3\pi]$

13. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ funksiyası verilmişdir.

a) təyin oblastını tapın.

b) $f(x+1) \geq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

14. a) $y = 3 + \sqrt{x-4}$ funksiyasının tərs funksiyasını tapın.

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(5 + 3\cos x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

15. Bir dövr ərzində sinusoid maksimumu (1;4) nöqtəsində, minimumu isə (3;-2) nöqtəsində alır. Bu funksiyanın amplitudunu və dövrünü tapın, düsturunu yazın.

16. Verilmiş funksiyanın amplitudunu, dövrünü tapın, qrafikini qurun.

a) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ b) $y = \sin x + \cos x$

17. Tənlikləri həll edin.

a) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \dfrac{1}{64}$ b) $0{,}2^{x-1} - 0{,}2^{x+1} = 4{,}8$

c) $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$ d) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 = 0$

e) $\log_{x-1} 2 = -0{,}5$ f) $\log_5(2 + \log_3(3 + x)) = 0$

g) $\log_2(2^{2x} + 16^x) = 2\log_4 12$ h) $\log_5 3 = -\dfrac{\log_2(1+x)}{\log_2 5}$

i) $\lg^2 x - 3\lg x = \lg x^2 - 4$ j) $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$

18. Bərabərsizlikləri həll edin.

a) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{2x} < 5\dfrac{4}{9}$ b) $0{,}9^x \geq 1\dfrac{19}{81}$

c) $(x^2 - 2x - 3)\cdot(2^x - 8) \leq 0$ d) $2^{\tan x} > \sin\dfrac{5\pi}{6}$

e) $\log_{\frac{1}{4}}(2x + 3) > \log_{\frac{1}{9}} 27$ f) $\dfrac{\log_3(6 - 2x)}{\log_{0,3} 5} > 0$

g) $\log_3(2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) > 0$ h) $\log_{\frac{1}{2}}|3 - x| > -1$

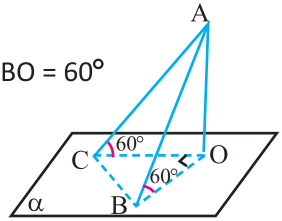
19. Çevrə üzərində 10 nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə yerləşən neçə üçbucaq qurmaq olar?

20. Qutuda 30 qara, x sayda ağ kürə var. Təsadüfən götürülən bir kürənin ağ olması ehtimalı $\frac{2}{5}$ olarsa, x-i tapın.

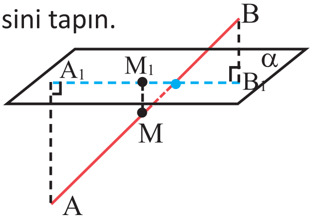
21. $2^0 \cdot {}_6C_0 + 2^1 \cdot {}_6C_1 + 2^2 \cdot {}_6C_2 + 2^3 \cdot {}_6C_3 + 2^4 \cdot {}_6C_4 + 2^5 \cdot {}_6C_5 + 2^6 \cdot {}_6C_6$ cəmini hesablayın.

22. Düzbucaqlı paralelepipedin tilləri 3 sm, 4 sm və 7 sm-dir. Bir təpədən çıxan üç tilin uclarından keçirilmiş kəsiyin sahəsini tapın.

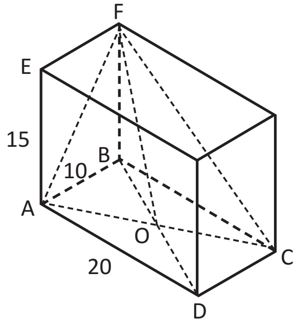
23. a) Verilir:
$AO \perp \alpha$
$\angle ACO = \angle ABO = 60°$
$\angle COB = 90°$
$AO = 3$
Tapın: BC



b) Müstəvini kəsən AB parçasının ucları müstəvidən 16 sm və 4 sm məsafədədir. Parçanın M orta nöqtəsinin müstəvidən məsafəsini tapın.



24. Düzbucaqlı paralelepipedin ölçüləri AD = 20 sm, AB = 10 sm, AE = 15 sm-dir.
a) $\angle AFB$, $\angle BFO$, $\angle AFO$, $\angle BOF$, $\angle AOF$, $\angle OFC$ bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.
b) ΔABO, ΔBOF, ΔAOF üçbucaqlarının sahələrini tapın
c) B nöqtəsindən AOF müstəvisinə qədər ən qısa məsafəni tapın.



25. Düz üçbucaqlı prizmada oturacağın sahəsi 16 sm², yan üzlərinin sahələri 36 sm², 40 sm², 68 sm²-dır. Prizmanın həcmini tapın.

26. Funksiyanın təyin oblastını tapın.

a) $y = \dfrac{x+5}{x^2 - 3x + 4}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}x - 4}$

27. Üçbucağın tərəfləri 4 sm, 5 sm, 6 sm-dir. Bu üçbucağın kiçik bucağının kosinusunu tapın.

28. m parametrinin hansı qiymətində $x^2 + (2 + m)x + m - 3 = 0$ tənliyinin köklərinin kvadratları cəmi ən kiçik olar?

29. A məntəqəsindən B məntəqəsinə qədər yolun 12 km-i yoxuş, 24 km-i isə enişdir. Atlı A-dan B-yə 7 saata getdi, geriyə isə 8 saata qayıtdı. Atlının enişdə və yoxuşda sürətini tapın.

30. Qrafikləri təsvir edərək, $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ tənliklər sisteminin

a) a-nın hansı müsbət qiymətlərində iki həlli;
b) a-nın hansı qiymətində üç həlli olduğunu araşdırın.
c) a-nın elə qiyməti varmı ki, sistemin dörd həlli olsun?

31. Üç anbarda 920 t buğda var və birinci anbardakı buğda ikincidəkindən 30 t azdır, ikinci və üçüncü anbarlardakı buğdanın kütlələri nisbəti isə 8 : 9 kimidir. Hər anbarda neçə ton buğda var?

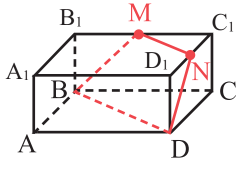
32. Üçbucağın tərəfləri 10 sm və 12 sm, onlar arasındakı bucağın sinusu 0,6-ya bərabərdir. Bu üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?

33. Tərəfləri 4 dm, 6 dm və 6 dm olan üçbucağın tənbölənlərini tapın.

34. Tərəfləri 4 sm, 6 sm və 8 sm olan üçbucağın medianlarını tapın.

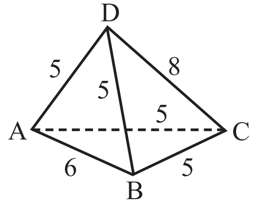
35. $y = -2\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$ düsturu ilə verilmiş harmonik rəqsin amplitudunu, tezliyini, əsas dövrünü tapın.

36. Verilir: Düzgün dördbucaqlı prizma
$B_1M = MC_1$
$C_1N = ND_1$
$AB = BC = 8$
$AA_1 = 4$



Tapın: BMND dördbucaqlısının sahəsini.

37. Ölçüləri verilmiş tetraedrin tam səthinin sahəsini tapın.



38. Yan tili 5 sm, tam səthi 84 sm^2 olan düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının tərəfini tapın.

39. Yan səthi 32 sm^2, diaqonalı 6 sm olan düzgün dördbucaqlı prizmanın həcmini tapın.

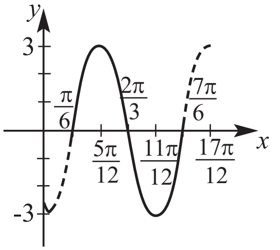
40. $x^2 + y^2 = 25$ tənliyi ilə verilmiş çevrə üzərində ordinatı absisindən 1 vahid böyük olan nöqtənin koordinatlarını tapın. Neçə belə nöqtə var?

41. Ədədi silsilədə $a_1 + a_2 + a_3 = 30$, $a_1^2 + a_2^2 = 116$ olduğu məlumdur. a_5 həddi 13-ə tam bölünürsə, a_1-i tapın.

42. Soldan sağa və sağdan sola oxunuşları eyni olan (məsələn, 67876 kimi) neçə beşrəqəmli ədəd var?

43. Statistik göstəricilərə görə dünya əhalisinin sayı 2020-ci ildə təxminən 7,8 milyard olmuşdur. İllik əhali artımı orta hesabla 1,02% olarsa, 2025-ci ildə dünya əhalisinin sayı təxminən neçə nəfər olar?

44. Şəkildə verilmiş qrafikinə görə həm sinus, həm də kosinus funksiyası üçün düstur yazın.



45. $y = 2\sin 3x + 3$ funksiyasının qrafikini 5 nöqtəsinə görə qurun. Bu funksiyanın qrafikinə görə $y = 2\sin 3(x - \frac{\pi}{3}) + 3$ funksiyasının qrafikini qurun.

46. Avtomobilin təkərinin diametri 50 sm-dir. Avtomobiin təkəri:
a) 5 dəfə; b) 500 dəfə tam dövr etdikdə qət erdiyi məsafəni tapın.

47. Bir fincan qaynadılmış suyun (100°) otaq temperaturuna qədər (20°) soyuması gözlənilir. Müşahidələr göstərir ki, suyun temperaturu ilə otaq tempuraturu arasındakı fərq hər dəqiqədə 5% olmaqla eksponensial qaydada azalır.
a) Temperaturun zamandan asılı dəyişməsini $y = ab^x + c$ şəklində modelləşdirin.
b) Neçə dəqiqədən sonra temperaturlar fərqi a) 10°; b) 1° olar?

48. Vulkan püskürməsi zamanı yanmış ağacın kömüründə Karbon-14 maddəsinin 45%-i qalmışdır. Vulkan püskürməsi neçə il əvvəl baş vermişdir?

49. Həsən nənəsindən neçə yaşı olduğunu soruşur. Nənəsi ona belə cavab verir: mən beş yaşımda məktəbə getmişəm, ömrümün dörddə bir hissəsini təhsilimlə məşğul olmuşam, sonra işə başladım və burada ömrümün yarısı keçdi. İndi də 15 ildir ki, nəvələrimə baxıram. Sən hesabla mənim neçə yaşım var? Həsənin nənəsinin yaşını siz də hesablayın.

50. Yeni koordinatları müəyyən edin.

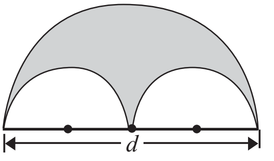
a) (5;3) nöqtəsi koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə 90° döndükdə.

b) (4;2) nöqtəsi koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 180° döndükdə.

c) (3;2) nöqtəsi *y* oxuna nəzərən əksetmədən sonra koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində tam (360°) dönmənin $\frac{3}{4}$ -ü qədər döndükdə.

d) (2; 3) nöqtəsi 3 vahid sağa sürüşdürülüb, koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətində 90° döndükdə.

51. Şəkildə üç yarımdairə təsvir edilmişdir. d = 18 sm olduğuna görə rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.

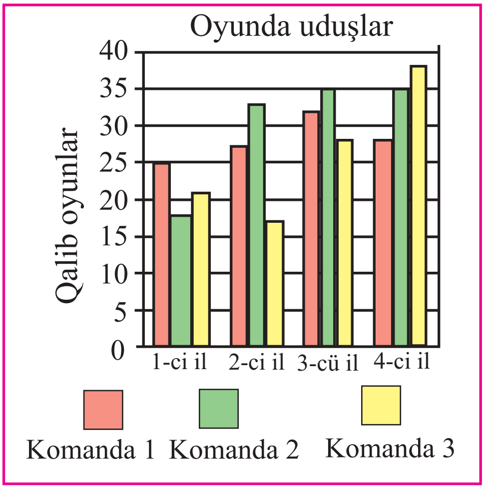


52. Aşağıdakı məlumat bir ay müddətində düşən yağıntının miqdarını (0,1mm dəqiqliklə) göstərir. Məlumatı gövdə-budaq-diaqramı ilə təqdim edin.

1,3; 2,0; 2,3; 3,2; 3,4; 1,8; 3,1; 2,3; 1,9; 2,6;
1,6; 0,0; 2,4; 3,1; 0,6; 0,7; 0,3; 0,0; 2,2; 1,5;
3,6; 2,3; 1,8; 2,7; 3,0; 2,9; 1,2; 2,2; 1,4; 3,3

53. Barqarf son 4 il ərzində 3 komandanın qalib gəldiyi oyunlar haqqında məlumatı əks etdirir. Bu məlumatlara görə aşağıdakı fikirlərdən hansı doğrudur?

a) Komanda -3 həmişə ikincidir.
b) Komanda -1-in nəticələri bütün komandalardan üstündür.
c) Komanda -1 həmişə Komanda- 3-ə nisbətən daha çox oyunda qalib gəlmişdir.
d) Komanda -2 hər il əvvəlki ilə görə daha çox oyunda qalib gəlmişdir.



54. Rəşad atıcılıq klubunun üzvüdür. Onun nəticələri atışlarının 80%-də hədəfi vurduğunu göstərir.

a) Rəşadın növbəti atışında hədəfi vurmamaq ehtimalını tapın.
b) Rəşadın 3 dəfə dalbadal hədəfi vurmaq ehtimalını tapın.
c) Rəşadın hədəfi birinci atışda vurmaq, sonrakı iki atışda vurmamaq ehtimalını tapın.

55. **Toğanalı-Kəlbəcər avtomobil yolu.** Göygöl və Kəlbəcər rayonlarını birləşdirən Toğanalı-Kəlbəcər-İstisu avtomobil yolunun tikintisi zamanı çətin relyefə malik ərazidə 31,5 km-lik yolun tikilməsi əvəzinə Murovdağ silsiləsinin altından 11,6 km-lik tunel ilə keçilməsi daha məqsədəuyğun hesab edilib.

a) Aşağıda verilən şəklə görə tunelin hündürlüyünü və enini təxmin edin.
Şəkildəki hansı detallardan istifadə etmək əlverişlidir?
c) Tunel qazılarkən çıxarılan torpağım həcmini təxmin edin. Bunun üçün siz hansı hesablamaları aparmalısınız?

56. Düzbucaqlı paralelepiped formalı çənin oturacağının ölçüləri 50 sm və 80 sm-dir. Çənin tutumu 400 *l* -dir. Çənin hündürlüyünü tapın.

57. Şəkildə verilənlərə görə doğru bərabərlikləri müəyyən edin.

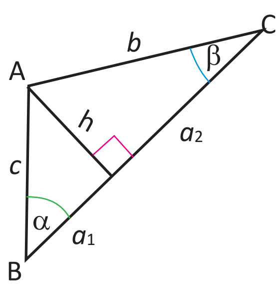
a) $h = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$

b) $h = \sqrt{b^2 - a_2^2}$

c) $h = \tan\beta \cdot a_1$

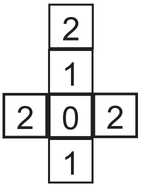
d) $h = \sin\beta \cdot c$

d) $h = \dfrac{b \cdot \sin\beta}{\sin 90^\circ}$

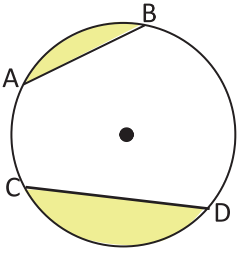


58. Usta terrasın döşənməsi üçün 400 daş plitə aldı. Bunların 4/5 hissəsi birinci növ, qalanı isə 2-ci növ plitələr idi. Birinci növ plitələrin 5%-nin, ikinci növ plitələrin isə 15%-nin zədəli ola bilməsi haqqında ustaya xəbərdarlıq edilmişdir. Usta bir plitə götürsə, onun zədəli olma ehtimalı nə qədərdir?

59. Oyun zərinin üzərindəki xalların sayı şəkildə göstərildiyi kimidir. Bu zər atılır. Düşən xalların sayı dəfə qəpik pul atılır. Uyğun budaqlanma diaqramı çəkin, mümkün halların sayını müəyyən edin.
Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:
A. "Pulun yalnız bir dəfə xəritə üzü düşmüşdür"
B. "Pulun ən azı bir dəfə xəritə üzü düşmüşdür"
C. "Pulun şəkil üzü düşməmişdir."



60. Diametri 10 sm olan dairədə AB = 6 sm, CD = 8 sm uzunluqda vətərlər çəkilmişdir.
Rənglənmiş seqmentlərin sahələrinin cəmini tapın.

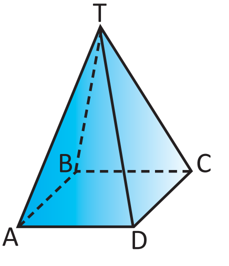


61. Qabarıq onbucaqlının heç bir üç diaqonalı bir nöqtədə kəsişmir. Diaqonalların kəsişmə nöqtələrinin sayını tapın.

62. a) x-in hansı qiymıətlərində $\ln(x-9)$, $\ln(x-7)$, $\ln(x-3)$ ədədləri ədədi silsilənin ardıcıl hədləridir?

b) x-in hansı qiymıətlərində 4^x-3, 2^x, $2^{2x-1}+2$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir?

63. Düzgün dördbucaqlı piramidanın həcmi 32 sm^3, yan səthinin sahəsi 32 sm^2-dir. Oturacağın D təpə nöqtəsindən TAB yan üzünü özündə saxlayan müstəviyə qədər məsafəni tapın.



64. 1) Verilmiş funksiyasının tərs funksiyasını tapın.
2) Tərs funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.

a) $y = 2^{x-1} + 3$ b) $y = 1 + \log_3 (x+2)$

65. Funksiyanın qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a) $y = 2^{|x-1|} + 3$ b) $y = \log_2 (x^2+2x+9)$

66. **Hansı avtomobili almaq sərfəlidir?** Avtomobil alarkən tez-tez sual yaranır ki, benzin mühərrikli avtomobil almaq yaxşı olar, yoxsa dizel mühərrikli?
Bir il ərzində yaranan xərcləri nəzərdən keçirmək sizə benzin və ya dizel mühərrikli avtomobil arasında seçim etməkdə kömək edə bilər. Avtomobillər haqqında məqalələr dərc edən jurnalda bir avtomobil markası üçün aşağıdakı məlumatları verilir:

	Benzin mühərrikli	Dizel mühərrikli
İllik sabit xərclər*)	₼ 2200	₼ 2400
100 km-ə orta yanacaq sərfi	8,0 litr	6,0 litr

*) Sabit xərclər - vergi, sığorta, yağdəyişmə, təmir və s.

a) 1 litr benzin 0,90₼, dizel yanacağın bir litri isə 0,70₼ -dır.
Aşağıdakı cədvəli doldurun.

İllik qət edilən məsafə	Benzin mühərriki: illik yanacaq xərcləri	Benzin mühərriki: ümumi illik xərclər (yanacaq xərcləri + sabit xərclər)	Dizel mühərriki: illik yanacaq xərcləri	Dizel mühərriki: illik ümumi xərclər (yanacaq xərcləri + sabit xərclər)
10 000 km				
20 000 km				
30 000 km				

b) İl ərzində 30 000 km məsafə qət etdikdə ümumi xərclərə görə dizel mühərrikli avtomobillə ildə nə qədər pula qənaət etməyin mümkün olduğunu hesablayın.
c) Qət edilən illik məsafə nə qədər olmalıdır ki, dizellə işləyən avtomobilin ümumi xərcləri benzinlə işləyən avtomobildən daha aşağı olsun.
d) Benzin mühərrikli yeni avtomobil 32 000₼, dizel mühərrikli yeni avtomobil daha bahadır və 34000₼-dır. Tahir dizel mühərrikli yeni avtomobil almaq istəyir. O, ildə orta hesabla 30 000 km məsafə qət edir. Ümumi xərclərdəki qənaət qiymət fərqini neçə ildə kompensasiya etməyə imkan verir?
e) Bu cür situasiyalarda təkrar satışa da diqqət edilir. Çünki yeni avtomobilin alınması adətən köhnəni satmaqla həyata keçirilir. Burada nəzərdən keçirilən avtomobillərə gəlincə, ehtimal etmək olar ki, üç ildən sonra satılsa, benzin mühərrikli avtomobil 14000₼, dizellə işləyən avtomobil isə 15000 ₼ satılacaq. Köhnəlmiş avtomobili satmaq fikri Tahirin d) bəndində qeyd edilmiş mülahizələrini necə dəyişdirə bilər?
f) Tahir üç il əvvəl bank hesabına illik 12 % faizlə 15000 ₼ yatırmışdı. O, yeni dizel avtomobili almaq istəsə, bu məbləğə daha nə qədər pul əlavə etməlidir?

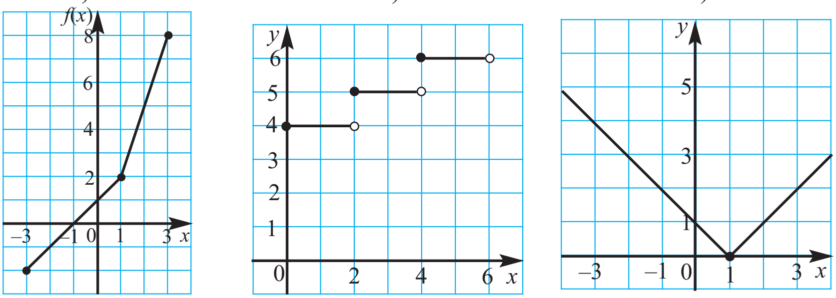
1. Funksiyalar

s. 8-11 №5 0 №6 a) 1; b) –1; c)7 № 8a) f(0) =–1; f(1) =0; f(–1)=–2; f(–2)=–3
№ 9 c) $1\le x\le 4$; $1\le y\le 5$ № 10 a)$f(-3) = 3$; $f(-1) = 5$; $f(0) = 4$; $f(1)=3$
№11 a) $b = -3$ №12 $c = 2$ №13 0 №15 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$; b) $f(-2) = 3$;
$f(6) = -1$ №16 b) $y = x^2 + 1$; $-1\le x<2$; $1\le y<5$ №19 a) $D(f)=[-6;2)$;
$E(f) =(1;5]$; b) $D(f) =[-4;4]$; $E(f) = [-1;8]$

s. 12-18 №1 b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; c) $x = 4$; d) $x = 2$ №4 c) sıfırları $x_1=-1$, $x_2 = 3$,
$x<-1$ olduqda $y>0$; $x>3$ olduqda $y>0$, $-1<x<3$ olduqda $y<0$ №5 a) $y = -\frac{1}{2}x+ 3$,
azalan №6 b) k=–1, azalan, $y = -x + 1$, №7 a) 1) k=3; 2) $y = 3x-2$; 3) artan
№9 a) $f(2)<f(0)<f(-4)$; c) $f(\sqrt{2}) < f(-\sqrt{3}) < f(-2)$ №10 a) $f(x) = 2x-3$;
b)$f(-4)<f(-3)<f(2)$; c)$x\ge 1$olduqda №12 2) a) [–2; 3]; b) –2 və 2; c) (–2; 2);
d) (2; 3]; e) [–2; 0]$\uparrow$, [0; 3]$\downarrow$; f) [–5; 4] №14 a) *tək*; b) *nə tək, nə cüt;* c) *cüt*
№17c) 6; d) 4 №19 b)hə, c)yox №20 1)d) $f(-5) < f(-7)$; 2) azalan №21 (–4; 4)

s. 20-23 №2 c) $y = x^3$ №3 a) $y =\frac{4}{x}$ №7 a) *hə*; b) *yox* №9 a) $f(0,1) > g(0,1)$;
b) $f(\frac{1}{2}) > g(\frac{1}{2})$; c) $f(2) < g(2)$ №10 a) $-2<x<2$ №11 a) 0; b) 5; c) –7; d) 41
№12 a) 4; c) 0; e) 2

№13 a) b) c)



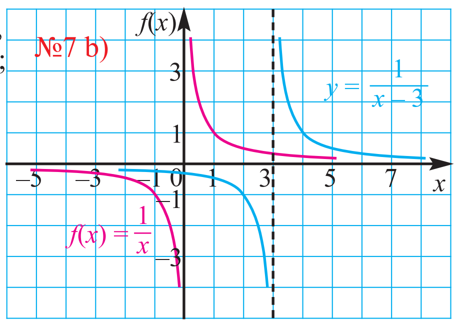
№15 1) 3 man; 2) yox; 3) 800 fotoşəkil №16 b) 416 ₼

s. 24-30 №1 a) $m = 0$, $n = 4$ d) $m = 7$; $n = -3$
№2 b) $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, *$y = x^2$ parabolası 2 vahid sağa, 1 vahid aşağı sürüşdürülür.* №4 1) b) $g(x) = (x + 3)^2 - 3$;2) b) $g(x) = f(x - 4) - 8$

№6a) $y = |x + 4| - 2$, $m = -4$, $n = -2$,
$D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-2; +\infty)$;
b) $y = (x - 6)^2 + 4$, $m = 6$, $n = 4$,
$D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [4; +\infty)$

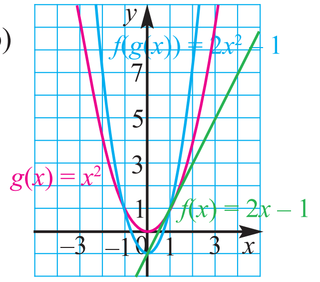
№9 a) iki vahid sağa sürüşdürülür
№11 b) $y = \sqrt{x}$ -in qrafiki x oxuna nəzərən əks edilir.

№14 1) a) y= –3x; b) $y = -x^2-1$;
c)$y = -\frac{1}{x}$ №18 a) $g(x) = 3|x|$;
b) $g(x)= -|x|$



s. 32-33 №1 a) 1; c) 2; d) 0 №2 a) 4; b) 50; f) –48

№3 a) $f(g(x)) = 2x^2 – 5$; b) $g(f(x)) = 4x^2 + 4x – 2$ №7 b)



№4 b) $f(g(x)) = 2\sqrt{x^2+1}$; $g(f(x)) = \sqrt{4x^2+1}$

№5 a) (–2; 2); b) (–∞; –3) ∪ (1; +∞);

№8 b) $f(x) = x^2 – 1$; d) $x^2 + x + 1$

№9 b) $f(–1) = –1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$, $f(0) = 1$, $f(x) = 2x + 1$ №10 b) $f(2x) = \sqrt{25 – 4x^2}$; D= [–2,5;2,5] №11 b) [–2; 6]; c) [–3; 1]

s. 37-38 №4 a) $f^{-1}(9) = –3$, $f^{-1}(7) = 1$, $f^{-1}(2) = 6$

№5 a) $y = \frac{1}{4}x$; *artan* c) $y = \frac{5 – x}{2}$; *azalan* №8 1) a) $y = \sqrt[3]{x}$ c) $y = \frac{1 + x}{x}$

№11 b) $f^{-1}(x) = –\frac{\sqrt[4]{x}}{2}$; c) $f^{-1}(x) = –\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$ №12 a) $F = \frac{9}{5}C + 32$ №13 b) ≈ 45 sm

s. 39-40 №2 b) $D(f) = (–\infty; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$; c) $D(f) = (–\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E(f) = (–\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; e) $D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$ №3 c) $D(f) = (–\infty; 3]$; d) $D(f) = [–1; 1]$; e) $D(f) = [1; 3) \cup (3; +\infty)$; f) $D(f) = [0; 2) \cup (2; +\infty)$.

№4 b) $D(g) = (–\infty; +\infty)$, $E(g) = (–\infty; 6]$; d) $D(\varphi) = (–\infty; +\infty)$, $E(\varphi) = [3; +\infty)$; e) $D(u) = [–3; 3]$, $E(u) = [0; 3]$; f) $D(v) = [–1; 3]$, $E(v) = [0; 2]$

№5 a) $D(f) = [0; 1) \cup (1; 2]$; b) $D(f) = (–\infty; 0] \cup (1; 2]$; c) $D(f) = (1; 2]$

№6 ƏKQ = 2, $E(f) = [2; +\infty)$ №7 a) $h = \sqrt{9 – d^2}$; b) D = [0; 3], E = [0; 3]

s. 41-42 №2 a) 1 vahid sağa; b) 3 vahid aşağı №3 a) $y = \sqrt[3]{x + 1}$ №4 a) [0,5;+∞) c) (–∞;4) e) [0;3) ∪ (3;+∞) f) [–2;1) ∪ (1; 2] №5 e) –2 və 2; f) 5 №6 1) a) *cüt*; b) *tək* №7 $f(2) = 10$ №10 b) –1 və 7 №11 a) 3; c) 11; f) 3; g) 7

№12 2) a) $f^{-1}(x) = \frac{1 + x}{2x}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{1 + 2x}{x + 1}$ №13 a) $D(f) = (–\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; b) (2;5)

2. Fəzada nöqtə, düz xətt, müstəvi

s. 46-49 №6 b) 1; 4 vəya sonsuz sayda №8 h) 90°; i) 45° №9 $\frac{3}{5}$ №14 a) 8 sm; b) $\frac{a + b}{2}$ №15 6 sm №16 6sm №17 18 sm və ya 22 sm

s. 50 №3 a) 6 sm ; b) 4,5 sm ; c) $\frac{bc}{a + c}$ №4 a) $\frac{a(b+c)}{b}$ №5 paralel

s. 54 №1 $x = 6$ №2 a) $8\sqrt{3}$sm; b) 4sm №3 6 sm №4 30° №5 $d = 5\sqrt{2}$, $\varphi = 45°$ № 6 45° №7 $a\sqrt{6}$ №8 45° №9 a) 17sm, 25sm; b) 6 sm, 9 sm

s. 57 №2 a) 6 sm №3 12 sm №4 5 sm №5 $\frac{\sqrt{15}}{2}$ sm №6 3 sm, №7 1sm

s. 59-63 №2 $a\sqrt{2}$ №3 2,4 sm №4 8 №6 $48\sqrt{3}$ sm² №7 a) $\frac{3}{8}a^2$; b) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

№8 60° №9 $4\sqrt{2}$ sm №11 $\sqrt{a^2+b^2}$ №18 17 sm

№20 a) 17 sm; b) 9 sm ; c) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

s. 65-67 №8 6 sm №9 15sm, 6sm, 8sm №10 12sm №11 2m №12 $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

s. 68-69 №2 7,2 m №3 58° №4 a) $\frac{a + b}{2}$; b) $\frac{a – b}{2}$ №5 $2\sqrt{3}$sm №6 b) 13sm və ya 15sm №7 16 №9 3sm №10 b) $\frac{a}{2}$; c) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ №11 a) 2sm; b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ sm; c) ≈19°

3. Triqonometrik ifadələr və onların çevrilmələri

s. 73-76 №1 c) III rüb №2 b) 150° №5 a) ≈1592° №7 1) 40°; $\frac{2\pi}{9}$
№9 b) $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ rad №10 c) –67,5° №11 2) $\frac{5\pi}{4}$ №13 b) –40°; 320°

s. 77-78 №1 a) 3,4π sm c)2,5mm №2 a)10π sm; 150πsm² №3 a) 18π sm; b)32π sm
№4 b) 24 mm, 72 mm №5 a) $\frac{55}{3}\pi$ sm² №6 1)10πsm; 2)270°; 3) ≈106°
№7 a) 192π m²; b)16π rad; 2880°

s. 80 №1 b)45π sm №2 c)75π sm №3 25sm/san, $\frac{1}{8}$ rad/san №4 45π m/dəq, №5 54π m

s. 82-93 №6a)II rüb, b) III rüb №7a) mənfi; b) müsbət №8a) 2sinθ; b) 0 №9 ±0,8
№13a) iki nöqtə, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ №18a)sin15°<sin20° c) cos20°>cos40° №19 b)$a<d<b<c$;
c)$b<c<a<d$ №20a)1,5;b)1;d)0,5№21b) 2 №22a)$2\sqrt{3}$ №25b) ƏBQ =2,
ƏKQ=0 №26 b) ƏBQ = 2, ƏKQ = 1 №30 $\frac{\pi}{3}$ və $\frac{2\pi}{3}$ №36 a)$\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\sqrt{3}$ №37 a) 0,42; b) –0,91 №38 a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$,
$\cot\alpha = -\frac{4}{3}$ №39 a)0; b)1; c)1

s. 96-98 №2 a) $\frac{5\pi}{14}$; b) $\frac{3\pi}{10}$ №7 b) – sin α; f) – cos α №9 b)$-\frac{1}{2}$; d) $-\sqrt{3}$
№10 a) – sinα №11 b) cos²α №12 a) – sin 10°№15 b) 1; d) 0
№16 a) 2cos α; b) 0 №18 c) 45°;135°

s. 100-102 №1 f) csc² α; h) 1 №2 cos α = –0,8; tan α = –0,75 №5 a) tan² α; b) 2
d) $\frac{2}{\sin\alpha}$ e) $\frac{1}{2}$ №6 a) 5; b) $\frac{1}{9}$ №7 a) 2 cos α; b) –2 cos α №9 a) $1\frac{9}{16}$
№10 a) 20; b) –16 №11 –0,32 №14 a) cos²α №16 a) ƏBQ = 3, ƏKQ = –4
№17 a) 1; c) 1; d)0

s. 105-106 №2 1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ №4 b) $\frac{1}{2}$ №5b)1№6a)1 №7 a)$\frac{1}{2}$; b)–1 №8 a) 0 №11 a)$\sqrt{3}$; b)1
№12 5 №13 a) 1 №14 a) $2-\sqrt{3}$ №15 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ №16 a) 1 №17 a) 1 №18 a) –3;b)3
№19 $\sin\varphi = \frac{16}{65}$, φ ≈ 14,3°№20 a) tan θ = 0,75 θ ≈ 36,9°

s. 107-111 №2 a) 0 №4 a) tan 5α; b) –tan4α №7 a)$\frac{1}{4}$ №10 a)$\frac{1}{2}$ №11 b) 0
№12 a) – sin 4x·cos 10x; b) –sin3x·sin$x$ №13 a) 2 cot α; c) 2 №14 b) 0,28
№16 a)2 №17 a)$\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ №19 a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; c) $-\frac{1}{3}$ №23 a) $-\frac{240}{289}$
№26 ≈141,2m №28 ≈1,005sm² №29 ≈ 0,46 kv.vahid

s. 112-113 №1 1) – cos 2x; 3) 1 №3 5)$\frac{1+\sin\alpha}{2}$ №5 b) $\frac{\sqrt{\sin x}}{\tan x}$ №6 b) 1
№8 c) ƏBQ = $\sqrt{2}$, ƏKQ = $-\sqrt{2}$ №9 $\frac{2}{\cos\alpha}$ №10 a) –1; b)1 №11 $\frac{1}{4}$

s. 114-115 №1 $\frac{\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\pi}{2}$ №3 II rüb №5 a) a; b) $-a$ №6 a) 1 №8 75°
№9 a)108πm²; b) ≈141,5° №11 1 №14 3 №15 a)$\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ №16 ≈48,8°
№17 a) 1 №18 1 №19 b)$-\frac{1}{2}$ №20 a) 3 b) 0,5 №21 b) ≈485sm²
№22 2) a) 0,6; b) 0,8

4. Sinuslar teoremi və kosinuslar teoremi

s. 119-125 №1 a) $b=12$; b) $a \approx 8{,}92$; №3 a) $4\sqrt{3}$; b) 8 №4 a) $\angle A \approx 36°$, $a \approx 14{,}72$, $c \approx 23{,}53$ №6 a) ≈ 29,96 sm; b) ≈ 52,36 sm; c) ≈ 34,71sm №7 a) 30°; b) 60° №8 a) bir həlli var; b) iki həlli var; d) həlli yoxdur №9 a) ≈ 41,6° və ya ≈138,4° №10 ≈51,5m; ≈8,4°; ≈136,6° №13 1) ≈ 16,06 m² №17 a) $30\sqrt{3}$ sm² №19 a) 25<BC<50; b) 0<BC<18 №20 ≈4139 m №21 θ≈38,2° və ya θ≈21,8° №22 ≈47,9 m №24 φ≈92° №25 ≈ 41,5°

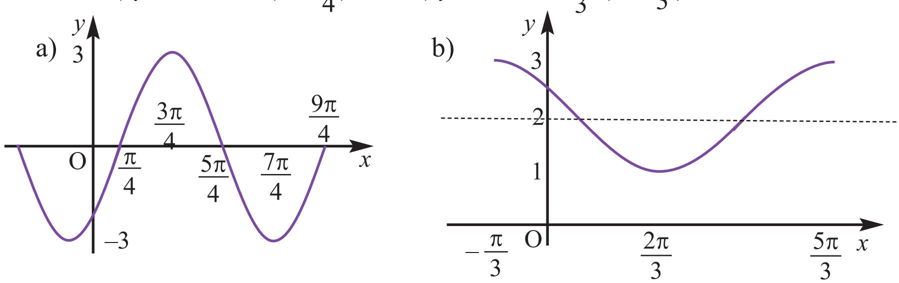
s. 128-130 №2 BC = 7; $\angle B \approx 81{,}8°$; $\angle C \approx 38{,}2°$ №3 1) ≈17,4; 2) ≈27,1; 3) ≈50,5° №4 b) 13sm; 32,2°; 27,8°; c) ≈4,6, ≈112,8°; ≈35,2° №5 a) 1) 3 və 6; 3) $\sqrt{14}$; b) $\sqrt{15}$ №6 a) $d_1=2\sqrt{13}$ sm, $d_2=2\sqrt{37}$ sm №7 a) $\sqrt{199}$sm; b) ≈100°; c) ≈68° №8 ≈130,68m №10 b) ≈42,5 km №11 ≈ 44,7 km №12 ≈ 111m №14 ≈ 257m

s. 131-132 №2 a) ≈ 3 km; b) ≈ 8,3 km və ≈ 8,9 km №3 ≈ 12,2m №5 6,5km №6 ≈ 191 m №7 ≈ 15,5 km və ≈ 42,4 km №9 ≈ 85,5° №10 1) 60°; 2) 12 və $\sqrt{189}$ №11 b) ≈ 1,56 dəqiqə

5. Triqonometrik funksiyalar və onların qrafikləri

s. 143-152 №5 $y=\sin x$, $y=-\frac{1}{2}\sin x$; $y=-2\sin x$ №7 1) a) $y=4\sin x$; b) $y=\frac{1}{3}\sin x$ №9 a) $a=\frac{1}{2}$, T = 2 c) $a=3$, T = 8π; №10 a) $a=4$, T=6π; b) $a=0{,}8$, T=2; c) $a=2$, T=π; №11 a) $y=12\sin\frac{1}{4}x$; c) $y=-0{,}8\sin\pi x$ №12 a) $y=9\cos\frac{1}{4}x$ №13 1) a) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}$; b) $y=4\cdot\sin 2x$; c) $y=2\sin x$ №27 a) $y=4\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-6$; b) $y=0{,}5\sin\frac{2}{3}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$

№29



s. 153-157 №1 1) T=8san.; 2) [1;7] №2 $a=0{,}5$; T = $\frac{2}{5}$; ν = $\frac{5}{2}$ №4 2) 75 №5 b) $H=36-18\cos\frac{10\pi t}{3}$ c) 72 sm; d) 226 m/dəq №7 $y=1{,}2-16\cos\frac{\pi}{6}(t-1)$ №8 a) T=0,8 san; b) 75 №9 a) $y=10-8\cos\frac{\pi t}{30}$; b) 18 m

s. 159-162 №1 a) –1 b) 1 №4 b) $\tan\theta=-\sqrt{3}$, θ = 120° c) $\tan\theta=-\sqrt{3}$, θ = 300° №14 a) $h=3\cdot\tan\alpha$ №15 a) $d=5\cdot\tan\frac{\pi t}{30}$; c) $d\approx 8{,}7$ m

s. 163-164 №1 a) B$\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$, C$\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$, D$\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$, E$\left(\frac{2\pi}{3}; 0\right)$, F$\left(\frac{5\pi}{6}; 2\right)$ №3 a) 1) T=3π №4 a) $a=10\sec\theta$ №5 a) 12; b) 16; c) $y=5+2\cos 2x$ №6 $y=12-10\cos\frac{\pi t}{50}$ №7 $y=6{,}1-5{,}8\cos\frac{\pi}{6}(t+2)$

6. Çoxüzlülər

s. 167-168 №4 a) 8; b) 24; c) 12 №5 120 sm

s. 171-172 №7 AC = 5, AC' = 13 №8 9 sm №9 13 sm №10 a) 26; b) 29
№11 $d_1 = a\sqrt{2}$, $d_2 = 2a$ №12 $d_1 = 13$ sm, $d_2 = 9$ sm

s. 177-180 №1 a) 39 m^2; 59 m^2; b)1200sm^2, 1440sm^2; c)216m^2, 258m^2 №2 a)$144+18\sqrt{3}$
№3 a) ≈498,88sm^2 №4 a)144sm^2;b)222m^2;c)152sm^2 №5 b) 672 c) 320
d)536; e)248 №6 6sm,14sm,16sm №7 188 sm^2 №8 S_{ot} =96, h=2
№9 a) $S_0 = 22$ m^2; b) $S_{yan}= 90$ m^2; c) $S_{tam}=134$ m^2 №10 c) ≈55 ml
№11 c)2380sm^2 №12 a)3,36m^2 ; b)160m^2 №13 7,504m^2 №14 35,28m^2
№15 a) ≈11,4 *l* №16 2008sm^2 №17 176sm^2 №18 90sm^2

s. 181-182 №3 2)b)18sm №4 c) P=58sm, S=180 sm^2; d) P=62sm, S=240 sm^2
№5 200 sm^2 №6 a) $S_{yan} = 6$ sm^2 №7 140 sm^2 №8 36 sm^2

s. 185-188 №1 12 sm №2 9 sm №3 a)1680 sm^2; b) 96 sm^2 ; c)728 sm^2 №4 b) 300sm^2
№6 a) 48; b)36; c)360 №7 a) 80sm^2; b)320sm^2 №8 a) 6; b)10; f)384
№9 f)$36\sqrt{3}$ №10 a) 13 və 15 №11 180 sm^2 №12 ≈ 182,6 m^2
№14 52 sm^2 №15 c) 288 sm^2 №16 36 sm^2 №17 a) 4 №19 $36\sqrt{3}$ sm^2 ,
$36(\sqrt{3}+1)$ sm^2 №20 $h_a = 6$ sm, $h = 3\sqrt{3}$ sm

s. 189-191 №2 a) 14 sm^2 №4 S_1=25 m^2, S_2=100 m^2, S_3 = 225m^2 №5 11 sm №8 152 sm^2
№9 360 sm^2 №10 330 sm^2 №11 12544 sm^2 №12 a)3740 sm^2 ; b) ≈407 sm

s. 192-193 №1 88; 85; $360 + 64\sqrt{3}$; 22 №2 d) a=8sm, h=3sm, h_a= 5sm №3 60
№4 a) 480m^2 №6 a)84 №7 a)24; b)12 №8 $\frac{9}{8}a^2$ №9 2) 5 sm №10 35sm

7. Triqonometrik tənliklər

s. 197-198 №1 b) $-\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{4}$ №4 a) ≈0,46rad; b) 0,84 rad №5 a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{12}$
№7 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\sqrt{3}$ f) -1 №8 b) 225°; f) ≈126,87° №9 a) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{24}{25}$; e) $\frac{63}{65}$ №10 a) $x = 4\csc\theta$;
b) ≈ 9,2° №11 θ ≈ 41,5° №12 b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{3}$ №14 a) $-\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{2\pi}{3}$

s. 201-207 №2 a)3) $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$; b)3) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in Z)$ №3 a) $2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$,
b) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$ №4 a) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}$ №6 b) 2)$\pm\frac{3\pi}{4}$;
3) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$ $(k\in Z)$ №9 d)1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in Z)$ №10 b) 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$
№11 a) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ №12 b)2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in Z)$ №14 c) $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}$
№16 e) $\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$; f) $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$ №17 b) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in Z)$; d) $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$
№18 b) 240° №19 a) 0°; 90°; 180° №20 $2\pi k$; $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in Z)$ №21 b) $\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$
№22 b) 60°; 120°; 240°; 300° №23 *altı kökü* №24 P=12

s. 211-212 №2 b) πk $(k\in Z)$ c) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ №3 c) $\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$ №4 a) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$
№5 a) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in Z)$; №6 b) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$ №7 b) $\frac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$
c) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k, (k\in Z)$; 1) $\pi k, (k\in Z)$ №8 b) ≈82,8°; ≈277,2° №9 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$
14) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$ №10 1) a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π №11 b) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in Z)$
№12 120°+180°k, 180°k, (k∈ Z)

s. 213-215 №1 $\theta \approx 25°$ №2 a)24sm; b) $\frac{2}{3}k$ ($k \in N$) saniyələrdə №3 a) $t = 3960(\csc\alpha - 1)$
№4 2)$f(t)=9-7\cos\frac{\pi t}{10}$ №5 $t \approx 0{,}4$san №6 a) $h(t)=1{,}5+2\cos\frac{\pi t}{12}$; b) ≈0,1m c) $t = 6$ san
№7 a) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ ($k \in Z$); b) $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ və $[\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}]$ №8 a) $h(t) = 21 + 20\sin\frac{\pi(t-10)}{20}$
s. 216-217 №2 a) 90°, 330° №3 d) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, ($k \in Z$) №4 a) 20m, 24m; d) ≈52,4;
e) ≈62,8 f) ≈628 №5 c) 0; $\frac{2\pi}{3}$; f) $\frac{3\pi}{2}$ №9 a) $a=3$, $b=2$ b) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$

8. Fəza fiqurlarının həcmi

s. 221-227 №1 b) 18m³ №6 a) V = 6 sm³ b) 60 sm³ artıb №7 375m³ №8 a)225 sm³;
b)120 m³ №9 V = 12 dm³ №10 24m³ №11 288 sm³ №12 a) 2 sm; b) $8\sqrt{3}$ sm³
№13 48 sm³ №15 ≈18,7 sm³ №16 $144\sqrt{3}$ sm², $648\sqrt{3}$ sm³ №17 840 m³ №19 80 sm³
№20 60sm³ №22 1680 sm³ №23 4 sm №24 $V_1=V_2=9{,}6$dm³; $V_3=V_4=28{,}8$dm³, $V_3=V_4=48$dm³
№27 a)99ton №28 b)18 sm³ №29 b) V= 144 №30 314,4kq №32 875 sm³
№34 120 sm³, 576 sm² №35 3 dm³

s. 229-231 №1 b) 4,4 m³; 159,3 m³ №3 15:7 №4 2880 mm³ №5 96 sm³
№7 ≈246,4 kub vahid №9 4 sm³ №10 $\frac{5\sqrt{39}}{2}$ sm³ №12 32 dm³ №14 $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ kub vahid
№15 $18\sqrt{6}$ sm³ №16 d) $h_a = 8$, $S_{yan}=144$, $V= 24\sqrt{39}$ №17 $198\sqrt{3}$; $288\sqrt{3}$
№18 13 sm³, 14790 sm³, 444 kub vahid №19 $42\sqrt{3}$ sm³
s. 234-236 №2 a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{6}{7}$ №3 a)25:9 b) 125:27 №4 a) 384sm³ №7 a) 0,8m;
b)26,4m²; c) 9 m³ №8 a) 43sm³; b) 180sm³ №9 a) 175sm²; b) 16m² №10 12m²
№11 3,6 kq №13 ≈0,2₼; ≈12,8₼ №15 $P_1 = 8$ sm, $P_2=12$ sm №16 $\frac{H}{\sqrt[3]{2}}$ №17 1:7:19
s. 238 №1 a)108 sm³ b) 4 sm³; c)104 sm³ №2 1072 sm³ №3 216 kub vahid
№4 a) 6 m; b)102m³ №5 a) $\frac{\sqrt{2}}{12}x^3$; b) $\frac{7\sqrt{2}}{96}x^3$
s. 242-243 №1 a) ≈1044 sm²; b) ≈454sm²; c) ≈681 sm³ №2 a) 5sm; b)420sm³
№4 $64+240\sqrt{2}$sm²; №7 12sm³ №8 27 : 98 №9 $36\sqrt{2}$ sm³ №10 $6\sqrt[3]{4}$ sm
№11 4 sm ×4 sm ×4sm, №12 90sm³, 123sm² №13 a) $144\sqrt{3}$ sm³

9. Üstlü və loqarifmik funksiyalar

s. 246-247 №3 a) 3^{5-n} b) 2^{5-x} №5 e) 2; f) 5; i) 256 №6 a) $10^{\sqrt{5}} > 10^{\sqrt{3}}$ b) $0{,}1^{\sqrt{3}}<10^{\sqrt{2}}$
№9 a) $9^{150} < 8^{200} < 125^{100}$ №10 a) $\frac{1}{2}$;b) $\frac{3}{5}$; c) 2 №11 d)$a^{0,75}$ №14 b) 8; h) 8
s. 250-257 №2 a) artan, c) azalan №6 a) $a<b<c$ №7 a) $y = -2\cdot(\frac{1}{4})^x$ b) $y=3\cdot5^x$
№12 b)5;c)3 №13 b) 3-dən kiçik №15 a) müsbət; b) mənfi №18 b)0,25q
№26 b) $y = \frac{5}{3}\cdot 3^x$ №32 a) $D(f)= (-\infty;+\infty)$; $E(f)= (2; +\infty)$; f) $D(f)= (-\infty;+\infty)$;
$E(f)= [0{,}5; +\infty)$ №33 b) ≈ 1587 ₼ №37 b) ≈ 3150 №38 kəsilməz, 8327₼ çox
s. 259-260 №3 a) −3 №4 b)3; d)−4; h)−1 №6 a) $5<\log_2 48<6$ №7 c) 6; d) 25; f) 9
№8 a) 2; b) $\frac{49}{3}$; c) 36 №9 a) $\frac{1}{2}$; b)16

s. 261 №5 a) artan; b) azalan №6 b) $\log_{\frac{1}{2}}5 < \log_{\frac{1}{2}}3$ c) $\log_2 3 > \log_5 4$ №7 $k=16$
№9 a) 2,41 c)17,75 rad

s. 263-265 №1 a)11 b)−5; i)−2; r)−1 №2 c)$2-\log_3|x|$ №3 a) $\log_2 15$; b) $\log_3 8$; g)$\log_3 800$
№4 a)$\log_x(10x)$; b)$\log_2(ab)$ №5 a) $\log_2\frac{x+3}{2}$; ($x>3$) №6 a) $a+b$; d) $a+b+1$ №7 2
№8 1) a) 27; b) 49 2) a) $5x^2$ №11 2) c) 4; d)4; h) −4
s. 266-267 №1 a)3,7 b)$2{,}5\cdot10^{-6}$ №2 a) ≈ 36 dB, b) *doğru deyil* №3 a) 7,1 b) 5 dəfə
№5 4,6 il, 11,7 il

s. 269-270 №1 d) –1; 3 h) 2 №2 14)10; 15)–3;5 №3 a) 0; 2 e)1;2 №4 b) 1; c) 1,5; №5 a) 0;1 c) 1 №6 a) 27 №7 e) 4+lg7 №8 3)–1,4; 9)1,5 №9 a) r≈0,042 b)≈35,4 dəq №10 a) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in Z)$; b) πk, $(k\in Z)$, c) 5;7 d) –2;2

s. 272-274 №1 b) 32; e) 2 №2 b) 6; g) 9 ; h) 4; $i) =\varnothing$; №3 a) 4; b) 3 №4 a) 81 ;$\frac{1}{3}$ c) 100;0,01 №5 a) $\frac{1}{2}$;8 c) 0,1;100 №6 a)1;b)2 №7 d)3; f)$\varnothing$; h) $\frac{1}{3}$;9 №8 2)10; 3)2 №9 2 №10 a) ±8; b)8 №11 x=4,5; y=0,5 №12 a) 2,1; b)4,1 №13 a)$7{,}9\cdot10^{-4}$mol/l №14 65422 Pa №15 3,2 bal №16 $2{,}3\cdot10^{-3}$ mol/l №17 b)7 il №18 b) 9,8 il №19 ≈ 21 il №21 a)1,37% №22 10000 dəfə

s. 276 №1 $l)$ $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; p) (–2; 4) №2 b) $x<9$; c) $x<2$ №3 b) $x>2$ №4 a) $x\geq-1$ b) $x\geq2$ №5 a) (–3; 3) c)$[-2;-1)\cup[2;+\infty)$ d) $(2;3)\cup(7;+\infty)$ №7 1) $x>\log_8 21$; 2) $y<\log_6 39$ №8 1) $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$ 3)(0; ln2)

s. 278-279 №1 a) (–1; 2) b) (6;+∞) g) (3;+∞) №2 5) $[-\frac{1}{4};+\infty)$; 8) (–5;3] №3 4) (0; 2) 8) $(-1;0)\cup(2;3)$ 12) (2; 32) 20) (9;14); 22) $(-9;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};9)$ №4 a)k=0,01 c) ≈15,4 il sonra №5 9,6 il №6 b) ≈5,9 q

s. 280-281 №3≈10,3 saat №4 a)2,1 №5 1) $x\geq\log_6 42$; 2)$x=\log_5 52$; 9)x=24 №6 ≈50 il №8 $\frac{4}{15}$ №10 2,15 №11 $y=3^{1-x}$ №12 a) 1000 dəfə №13 a)1026 nəfər №14 $T=80\cdot(\frac{3}{4})^{t/5}+20$ №15 ≈10 il №16 a)4; b)-1; d)3

10. Məlumatlar, proqnozlar

s. 296 №1 a) 6 b) 8 d) k–1 №3 a)$70x^4y^4$; e)$6u^2$ №4 a)11 hədd; b) $252x^5y^5$ №5 a) $(z+t)^4$; b) $(m+y)^5$ №7 a) ${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$ №10 a) 8; b)5 ci hədd;70

s. 301-302 №2 a)$\frac{5}{32}$; b)$\frac{5}{16}$; c)$\frac{5}{32}$; d)$\frac{1}{32}$; e)$\frac{5}{16}$ №3 $\frac{80}{243}$ №5 a) ≈ 0,004 №8 a)$\frac{1}{9}$;$\frac{1}{12}$

s. 303 №1 a) 0,144 ; b) 0,432 №3 a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{5}{16}$ №5 $\frac{12}{145}$ №6 a) 2 ağ 1 yaşıl b) 0,8 №7 b) 120 №8 0,1536 №9 $\frac{1}{90}$ №10 a) 24; b) 48; c)72

Ümumiləşdirici tapşırıqlar

s. 304-312 №2 5 nəfər №3 60 kq, 300 kq №4 a) (–4;4) №5 $b_n=3^n+1$ №6 20% №7 b)-1 №8 a) $\frac{\pi}{2}$ №9 b) 4 №13 a) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ b) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$ №14 b) [–3;–1] №15 $y=1+3\sin\frac{\pi x}{2}$ №17 a) –2;4 j) 1;3;$\frac{1}{9}$ №18 e) (-1,5;2,5) h) $(1;3)\cup(3;5)$ №19 120 №20 20 №21 $(2+1)^6=3^6=729$ №23 b) 6sm №25 96sm³ №27 $\frac{3}{4}$ №28 m=–3 №29 4 km/saat, 8 km/saat №33 $4\sqrt{2}$ dm; $1{,}6\sqrt{6}$ dm $1{,}6\sqrt{6}$ dm №36 $24\sqrt{3}$ №37 48 №38 6sm №39 $8\sqrt{2}$ sm³ və ya 32 sm³ №40 (–4;–3) və (3; 4) №41 –4 №42 900 №44 $y=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})$, $y=3\cos(2x-\frac{5\pi}{6})$ №47 1) $y=20+80\cdot0{,}95^x$ 2) a) ≈ 41dəq; b) ≈85 dəq №48 ≈6600 il №50 a) (–3;5) №51 81πsm² №54 c) 0,032 №56 100 sm №59 $\frac{5}{12}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{11}{24}$ №60 12,5π–24sm² №61 210 №62 a)11 №63 6sm №64 1) a) $y=1+\log_2(x-3)$; b) $y=3^{x-1}-2$

Buraxılış məlumatı

Ümumi təhsil müəssisələrinin 10-cu sinifləri
üçün riyaziyyat fənni üzrə
Dərslik

Tərtibçi heyət:
Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Məsləhətçi: **Çingiz Qacar**
İxtisas redaktoru: **İbrahim Məhərov**
Əbdürrəhim Quliyev

Dil redaktoru: **Asəf Həsənov**

Kompüter tərtibatı: **Mustafa Qəhrəmanov**
Rəşad Musayev

Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**
Korrektoru: **Tərlan Qəhrəmanova**

Hesab-nəşriyyat həcmi: 19,1 . Fiziki çap vərəqi: 20.
Kağız formatı: 70×100 1/16. Kəsimdən sonra ölçüsü: 165×240.
Səhifə sayı: 320. Şriftin adı və ölçüsü: Calibri qarnituru, 11-12 pt.
Ofset kağızı. Ofset çapı. Sifariş . Tiraj . Pulsuz. Bakı – 2022.

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix:

Çap məhsulunu hazırlayan:
“Radius” MMC (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

Çap məhsulunu istehsal edən:
“Təhsil Nəşriyyat-Poliqrafiya” MMC
Bakı, AZ1052, F.Xoyski küç., 121A(149)

Pulsuz

Əziz məktəbli!

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaqsınız, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!